Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук

Е. В. НОВАК
Т. В. РЯЗАНОВА
И. В. НОВАК

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
43.03.04 «Политология», 39.03.01 «Социология»,
39.03.02 «Социальная работа», 37.03.01 «Психология»,
по направлению подготовки специалитета
37.05.01 «Клиническая психология»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 517(075.8)
Н723

Рецензенты:
лаборатория прикладной механики
Института машиноведения УрО РАН
(заведующий лабораторией
кандидат технических наук, доцент Л. Ф. Спевак);
С. И. Канторович, кандидат физико-математических наук,
генеральный директор АО «Уралавтоматика»

Под общей редакцией
Т. В. Рязановой

Новак, Е. В.
Н723 Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения : [учеб. пособие] / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; [под общ. ред. Т. В. Рязановой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. – 111 с.
ISBN 978-5-7996-1536-9

Учебное пособие является логическим продолжением курса «Теория пределов, непрерывность и дифференцируемость функций», способствует пониманию и развитию навыков вычисления интегралов и решения дифференциальных уравнений.

Адресовано студентам начальных курсов гуманитарных направлений подготовки, изучающих основные математические структуры в рамках дисциплины «Высшая математика».

ISBN 978-5-7996-1536-9

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов первого и второго курса Института социальных и политических наук Уральского федерального университета, изучающих математические основы в рамках курса высшей математики.

Цель курса – способствовать пониманию и развитию навыков вычисления интегралов и дифференциальных уравнений. Для того чтобы научиться легко, быстро, а главное правильно решать интегралы, необходима практика, поэтому наше учебное пособие содержит большое количество практических заданий. Теоретический материал курса представлен здесь лишь в том объеме, в котором он необходим для решения задач. Более подробные теоретические сведения можно найти в литературе, список которой прилагается.

Глава 1 пособия посвящена неопределенному интегралу и содержит все необходимые для решения задач определения, теоремы, таблицы и методы, а также примеры с решениями, что дает возможность студентам глубже понять тему. В главе 2 рассматриваются определенные и несобственные интегралы. Особое внимание уделено геометрическим приложениям интеграла, а именно вычислению площадей плоских фигур и вычислению объемов тел вращения. Глава 3 поможет читателю в изучении дифференциальных уравнений первого и высших порядков.

В каждой подглаве имеется небольшая самостоятельная работа с ответами для закрепления полученных знаний.

Учебное пособие включает две контрольные работы, посвященные интегральному и дифференциальному исчислению, которые содержат 15 вариантов контрольных заданий, один вариант представлен с подробным решением.

Значком «*» помечены разделы, не входящие в обязательную программу.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятия неопределенного интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, если для любого $x \in (a;\ b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Пример. Найти первообразную функции $f(x) = x^2$, $x \in R$.

Решение. Легко заметить, что производная функции $F(x) = \frac{x^3}{3}$ равна $f(x) = x^2$. Первообразными будут также любые функции $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

Пример. Найти первообразную функции $f(x) = \cos x$, $x \in R$.

Решение. Первообразная равна $F(x) = \sin x + C$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;\ b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Доказательство. Функция $F(x) + C$ является первообразной $f(x)$. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Пусть $\Phi(x)$ – некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in (a;\ b)$ имеем $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. А это означает, что $\Phi(x) - F(x) = C$, где $C = \text{const}$.

Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция на этом промежутке постоянна. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. Что и требовалось доказать.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

По определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ – знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Неопределенный интеграл геометрически представляет собой семейство «параллельных» кривых $F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой* (рис. 1).

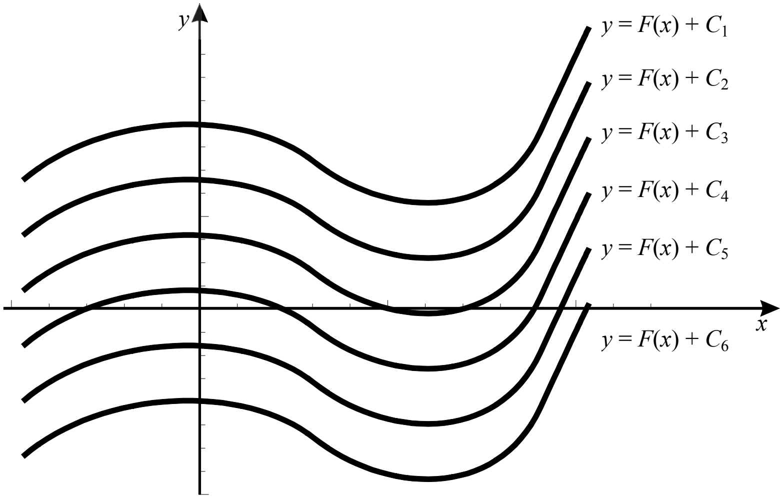


Рис. 1

1.2. Свойства неопределенного интеграла

1⁰. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

Свойство верно, так как $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2⁰. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

3⁰. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Свойство верно, так как $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

4^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ $(a \neq 0)$.

Пусть $F'(x) = f(x)$, тогда $\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aF(x))'dx =$ $= \int d(aF(x)) = aF(x) + C_1 = a(F(x) + C_1/a) = a(F(x) + c) = a\int f(x)dx$.

5^0. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, тогда $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F'(x) \pm$ $\pm G'(x))dx = \int (F(x) \pm G(x))'\, dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C =$ $= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, где $C_1 \pm C_2 = C$.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int 0dx = C$.

2) $\int x^n\, dx = x^{n+1}/(n + 1) + C$, $n \neq -1$, в частности, $\int dx = x + C$.

3) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6) $\int e^x dx = e^x + C$.

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \mathrm{C} = -\operatorname{arcctg} x + C$.

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

Примеры. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx = \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx = \int\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx =$

$= \int dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int\frac{dx}{x} = x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + C.$

2) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$= \int(1+\sin x)dx = x - \cos x + C.$

3) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \int\frac{1}{1+x^2}dx =$

$= x - \operatorname{arctg} x + C.$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int\left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} - 3\right)dx.$ Ответ: $-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} - 3x + C.$

2) $\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx.$ Ответ: $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$

3) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx.$ Ответ: $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$

1.4. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$.

Сделаем подстановку: $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$. Получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Примеры. Вычислить интеграл:

1) $$\int e^{\frac{x}{3}}dx = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{3} = t \\ \dfrac{1}{3}dx = dt \\ dx = 3dt \end{bmatrix} = \int e^t 3dt = 3\int e^t dt = 3e^t + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{2-3x} = \begin{bmatrix} 2-3x = t \\ -3dx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{3t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C.$$

3) $$\int \sin(5x-3)dx = \begin{bmatrix} 5x-3 = \mathrm{t} \\ 5dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{bmatrix} = \int \sin t\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos(5x-3) + C.$$

4) $$\int \sqrt[5]{2x-1}\,dx = \begin{bmatrix} 2x-1 = t \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int \sqrt[5]{t}\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{5}}dt = \frac{5}{12}t^{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{12}t\sqrt[5]{t} + C = \frac{5}{12}(2x-1)\sqrt[5]{2x-1} + C.$$

5) $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \begin{bmatrix} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C =$

$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x) + C.$

В примерах была использована подстановка $t = ax + b$, где a и b – константы ($a \neq 0$).

Теорема. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где a и b – константы ($a \neq 0$).

Доказательство. Воспользуемся определением неопределенного интеграла $\int f(ax + b)d(ax + b) = F(ax + b) + C$, так как $d(ax + b) = d(ax) + db = adx \Rightarrow a\int f(ax + b)dx = F(ax + b) + C \Rightarrow$ $\Rightarrow \int f(ax + b)dx = F(ax + b)/a + C/a \Rightarrow \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C_1$.

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int e^{7-2x}dx$. Ответ: $-\frac{1}{2}e^{7-2x} + C$.

2) $\int \frac{dx}{2-4x}$. Ответ: $-\frac{1}{4}\ln|2-4x| + C$.

3) $\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$. Ответ: $2\sin\left(\frac{x}{2}+1\right) + C$.

4) $\int (7x-4)^4 dx$. Ответ: $\frac{1}{35}(7x-4)^5 + C$.

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{3}\arcsin 3x + C$.

Рассмотрим интегралы, берущиеся с помощью *нелинейных подстановок*. При нахождении таких интегралов нет единого алгоритма, необходимо увидеть замену, которая приведет к нахождению более простого интеграла.

Примеры.

1) $$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = \begin{bmatrix} -x^3 = t \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\dfrac{1}{3}dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x^3} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} = \begin{bmatrix} 1-\ln x = t \\ -\dfrac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -2t^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -2\sqrt{1-\ln x} + C.$$

3) $$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

4) $$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x-3} = t \\ x = 3+t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = 2\int (3+t^2)\,t^2dt = 6\int t^2dt +$$

$$+ 2\int t^4dt = 2t^3 + \frac{2}{5}t^5 + C = 2(\sqrt{x-3})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{x-3})^5 + C.$$

5) $$\int x(x-1)^{11}dx = \begin{bmatrix} x-1 = t \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int (t+1)\,t^{11}dt = \int (t^{12} + t^{11})dt =$$

$$= \frac{1}{13}t^{13} + \frac{1}{12}t^{12} + C = \frac{1}{13}(x-1)^{13} + \frac{1}{12}(x-1)^{12} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{(e^x+1-e^x)}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \begin{bmatrix} e^x+1=t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} =$

$= x - \int \frac{dt}{t} = x - \ln|t| + C = x - \ln\left|e^x+1\right| + C.$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int 2\,\mathrm{tg}^3\, x dx.$ Ответ: $\mathrm{tg}^2\, x + \ln|\cos x| + C.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^4}}.$ Ответ: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\left(1+\sqrt[4]{x}\right) + C.$

3) $\int \sqrt[7]{1+\cos^2 x}\sin 2x dx.$ Ответ: $-\frac{7}{8} + \sqrt{(1-\cos^2 x)^8} + C.$

4) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx.$

Ответ: $2\sqrt{1+\ln x} - \ln\ln x + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x} - 1\right| + C.$

5) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}.$ Ответ: $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1} + C.$

1.5. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Приведенные интегралы вычисляются следующим образом:

1) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}dx = dt \Rightarrow dx = adt \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{t^2+1} = \frac{a}{a^2}\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$

2) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{2adx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{a+x+a-x}{(x-a)(x+a)}dx =$

$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{a+x}{(x-a)(x+a)}dx + \int \frac{a-x}{(x-a)(x+a)}dx\right) =$

$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{(x-a)} - \int \frac{dx}{(x+a)}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C =$

$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \begin{bmatrix} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}dx = dt \Rightarrow dx = adt \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{a}\int \frac{adx}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{a}{a}\arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$

$= \begin{bmatrix} x+\sqrt{x^2+a} = t \quad \text{(подстановка Эйлера)} \\ \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}\cdot dx = dt \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2+a}}\cdot dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} =$

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$

1.6. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. По свойству дифференциала $d(uv) = udv + vdu$.

Интегрируя это равенство, получим

$\int d(uv) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du,$

$uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du \Rightarrow \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется в виде произведения двух сомножителей u и dv. После нахождения v и du используется формула интегрирования по частям.

Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Примеры.

$$1)\ \int (x+1)e^{2x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

$$2)\ \int \ln(1-x)dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(1-x) \Rightarrow du = \dfrac{-dx}{1-x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right] = x\ln(1-x) -$$

$$-\int \frac{-xdx}{1-x} = x\ln(1-x) - \int \frac{x-1+1}{x-1}dx = x\ln(1-x) -$$

$$-\int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x\ln(1-x) - x - \int \frac{dx}{x-1} = x\ln(1-x) - x -$$

$$-\ln|x-1| + C.$$

$$3)\ \int x^2 \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array}\right] = x^2 \sin x -$$

$$-2\int x \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right] = x^2 \sin x -$$

$$-2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

4) $I=\int e^x\cos 3x dx=\begin{bmatrix} u=\cos 3x \Rightarrow du=-3\sin 3x dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{bmatrix}=$

$=e^x\cos 3x+3\int e^x \sin 3x dx=\begin{bmatrix} u=\sin 3x \Rightarrow du=3\cos 3x dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{bmatrix}=$

$=e^x\cos 3x+3e^x\sin 3x-9\int e^x\cos 3x dx=$

$=e^x\cos 3x+3e^x\sin 3x-9\cdot I.$

Таким образом, $I=e^x\cos 3x+3e^x\sin 3x-9\cdot I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\cdot I=e^x\cos 3x+3e^x\sin 3x \Leftrightarrow I=\frac{1}{10}\left(e^x\cos 3x+3e^x\sin 3x\right).$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int \arccos x dx.$ Ответ: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$

2) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx.$ Ответ: $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

3) $\int e^{\sqrt{x}}dx.$ Ответ: $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$

4) $\int \sin(\ln x)dx.$ Ответ: $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C.$

5) $\int \left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx.$ Ответ: $-e^{-x}\left(x^2+5\right)+C.$

1.7. Интегрирование простейших рациональных дробей

1.7.1. Понятия о рациональных функциях

Определение. Функция вида $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+$ $+a_n$, где n – натуральное число; a_i ($i=0, 1, \ldots, n$) – постоянные коэффициенты, называется *многочленом* (или *целой рациональной функцией*). Число n называется степенью многочлена.

Определение. *Корнем многочлена* называется такое значение x_0 переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е. $P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n - 1)$.

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Теорема. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}\ldots(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$.

При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$. Все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры. Разложить на множители:

1) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

2) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4)$.

3) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9 = x^3(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) =$ $= (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 1) = (x - 3)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

1.7.2. Дробно-рациональная функция

Определение. *Дробно-рациональной функцией* (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Определение. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$. В противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной.*

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_l(x)}{Q_n(x)}$,

т. е. $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \dfrac{P_l(x)}{Q_n(x)}$.

Примеры. Представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

1) $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^3 - 2x} = \dfrac{x^3 - 2x + 3x + 1}{x^3 - 2x} = 1 + \dfrac{3x + 1}{x^3 - 2x}$.

2) $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{15}{x - 2}$.

Деление многочлена на многочлен столбиком:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x + 9 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\; x^4 - 2x^3 \phantom{{}+9} & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\ \cline{1-1}
2x^3 \phantom{{}- 5x + 9} & \\
-\; 2x^3 - 4x^2 \phantom{{}+9} & \\ \cline{1-1}
4x^2 - 5x \phantom{{}+9} & \\
-\; 4x^2 - 8x \phantom{{}+9} & \\ \cline{1-1}
3x + 9 & \\
-\; 3x - 6 & \\ \cline{1-1}
15 &
\end{array}
$$

Определение. Дроби $\dfrac{A}{x - a}$, $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ $(k \geq 2,\ k \in N)$, $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$, $\dfrac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geq 2$ и корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$), где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями.*

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители $Q_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x -$ $- x_1)^{k_2} \dots (x - x_1)^{k_r}(x^2 + p_m x + q_m)^{s_1} \dots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$, можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\cdots+\frac{N_1x+M_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{N_2x+M_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{N_{s_1}x+M_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{C_{s_m}x+D_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},$$

где A_1, A_2, … B_1, B_2, … C_1, D_1, … M_1, N_1, … – некоторые действительные коэффициенты.

Примеры. Разложить на простые дроби:

1) $$\frac{x^2+2x-1}{(x+2)(x-1)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

2) $$\frac{x^3+1}{(x^2+2)(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

3) $$\frac{3x^2+2x-6}{(x-2)(x+3)(x^2-x+2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2-x+2}+$$

$$+\frac{Nx+M}{(x^2-x+2)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... можно применить метод сравнивания коэффициентов. Суть метода в следующем:

1. В правой части равенства приведем к общему знаменателю $Q_n(x)$. В результате получим тождество $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{S(x)}{Q_n(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е. $P_m(x)\equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты A_1, A_2, ... B_1, ...

Примеры. Представить дроби в виде суммы простейших дробей:

1) $$\frac{x^2+1}{(x^2+2)(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2+2)+B(x^2+2)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x^2+2)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(2A+C+2D)x}{(x^2+2)(x+1)^2}+$$

$$+\frac{(2A+2B+D)}{(x^2+2)(x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A+C=0,\\A+B+2C+D=1,\\2A+C+2D=0,\\2A+2B+D=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=-\frac{2}{9},\ B=\frac{2}{3},\ C=\frac{2}{9},\ D=\frac{1}{9}.$$

Таким образом, $\dfrac{x^2+1}{(x^2+2)(x+1)^2}=-\dfrac{2}{9(x+1)}+\dfrac{2}{3(x+1)^2}+\dfrac{2x+1}{2(x^2+2)}.$

2) $$\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{(A+B)x+2B-A}{(x+2)(x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=2,\\2B-A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5}{3},\\[2ex]B=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

То есть $\dfrac{2x-1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{5}{3(x+2)}+\dfrac{1}{3(x-1)}.$

1.7.3. Интегрирование простейших рациональных дробей

1) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

При условии что знаменатель не имеет действительных корней, выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2 + px + q =$ $= x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$ Введем теперь новую переменную $t = x+\frac{p}{2}$, т. е. $x=t-\frac{p}{2}$ и $dt = dx$, $x^2 + px + q =$ $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=t^2+a^2.$ Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Делаем обратную замену и получаем

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Стоить отметить, что нет смысла учить значение этого интеграла, гораздо важнее знать принцип его вычисления.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{2x+1}{(x+2)^2+9}dx=\begin{bmatrix}x+2=t\\ x=t-2\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{2t-3}{t^2+3^2}dt=$$

$$= 2\int \frac{tdt}{t^2+3^2} - 3\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \ln\left(t^2+3^2\right) - \operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= \ln\left((x+2)^2+9\right) - \operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C.$$

1.7.4. Интегрирование рациональных дробей

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Примеры. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx.$

Выразим дробь в виде простейших дробей:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2\left(x^2+2x+2\right)} = x-2+\frac{Ax+B}{x^2}+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2} = x-2+\frac{(Ax+B)\left(x^2+2x+2\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+2x+2\right)} =$$

$$= x-2+\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B}{x^2\left(x^2+2x+2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=4, \\ 2A+B+D=4, \\ 2A+2B=4, \\ 2B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0, \\ B=2, \\ C=4, \\ D=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Тогда интеграл можно представить в виде суммы трех интегралов:

$$\int (x-2)dx + 2\int x^{-2}dx + \int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+$$

$$+\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx = \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$\left| \begin{aligned} &\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = 2\int \frac{2t-1}{t^2+1}dt = \\ &= 4\int \frac{t}{t^2+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\ln\left|t^2+1\right| - 2\operatorname{arctg} t + C = \\ &= 2\ln\left|(x+1)^2+1\right| - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left|(x+1)^2+1\right|-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx =$

$$\left| \begin{aligned} &\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A+B=2, \\ 2A-B=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3, \\ B=-1 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$= \int \frac{3dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} = 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Ответ: $\displaystyle\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}dx.$ Ответ: $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)\left(x^3-4x^2+3x\right)}dx.$

Ответ: $\displaystyle\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C.$

4) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx.$

Ответ: $\displaystyle\frac{(x-2)^2}{2}-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$

5) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

Ответ: $\displaystyle\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$

1.8. Интегрирование тригонометрических функций

1.8.1. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax\cdot\cos bx\,dx$, $\int \cos ax\cdot\cos bx\,dx$, $\int \sin ax\cdot\sin bx\,dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\,(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Примеры. Найти интегралы:

1) $\int\sin 8x\cdot\cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 12x)dx =$

$= \frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int\cos 12x\,dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$

2) $\int\sin 3x\cdot\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin x+\sin 5x)\,dx = \frac{1}{2}\int\sin x\,dx +$

$+\ \frac{1}{2}\int\sin 5x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$

1.8.2. Интегралы типа $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n – целое положительное нечетное число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m – целое положительное нечетное число;

3) формулы понижения порядка:

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$ $\qquad\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha,$

если m и n – целые неотрицательные четные числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m+n$ – четное отрицательное целое число.

Примеры. Найти интегралы:

$$1)\ \int \sin^4 x\cdot\cos^5 x dx=\begin{bmatrix}\sin x=t\Rightarrow x=\arcsin t\\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ \cos x=\sqrt{1-t^2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int t^4\cdot\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int t^4\cdot(1-t^2)^2\sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$=\int t^4\cdot(1-2t^2+t^4)dt=\int(t^4-2t^6+t^8)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9+C=$$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 t+\frac{1}{9}\sin^9 t+C.$$

$$2)\ \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x dx=\int\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2\,\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-2\cos 2x-2\cos^2 2x+\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)dx-$$

$$-\frac{1}{16}\int(1+\cos 4x)\,dx+\frac{1}{8}\int\cos^2 2x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\sin 2x-$$

$$-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} = \int \sin^{-3} x \cdot \cos^{-1} x dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] =$$

$$= \int \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{-3} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^4}{t^3\left(1+t^2\right)} dt = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3\left(1+t^2\right)} dt =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int \left(t^{-3} + \frac{1}{t} \right) dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

1.8.3. Универсальная тригонометрическая подстановка

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$ Такая подстановка называется *универсальной.*

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$\displaystyle\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$ где $R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Примеры. Найти интегралы:

1) $$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)(3(1+t^2)+2t+1-t^2)} = \int \frac{2dt}{2t^2+2t+4} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right] = \int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx.$ Ответ: $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x - 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + C.$

2) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$

3) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}.$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$

4) $\int \frac{\sin x dx}{\sin x + 1}.$ Ответ: $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C.$

5) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$ Ответ: $\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятия определенного интеграла

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $y = f(x)$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией* (рис. 2).

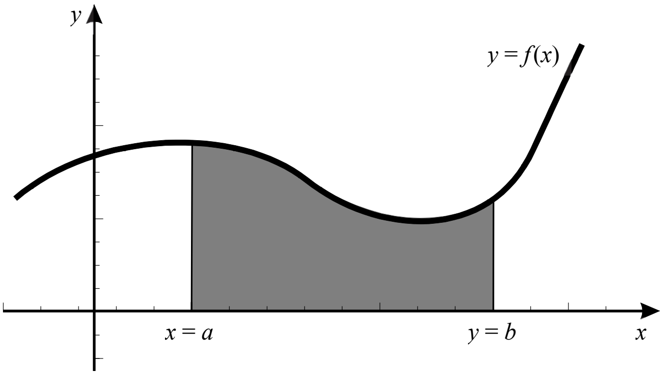


Рис. 2

Найдем площадь этой трапеции. С помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2, ... $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < ...< x_n$) разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$.

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ... n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$ (рис. 3).

Умножим значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений $f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$ равна площади ступенчатой фигуры.

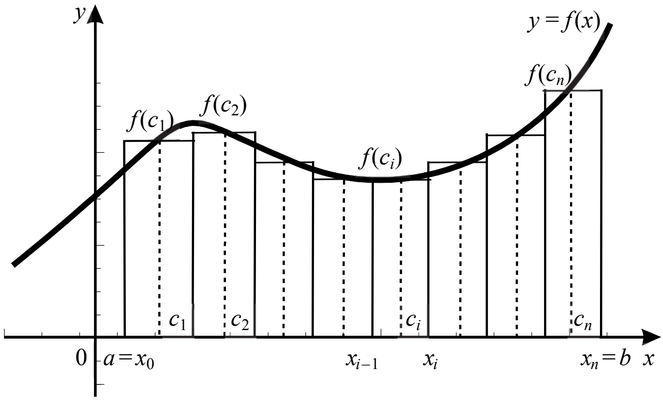


Рис. 3

Определение. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл интегральной суммы – это площадь под ломаной.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Если $\lambda = \max \Delta x_i$ стремится к 0, то ломаная стремится к графику функции $y = f(x)$.

Определение. Пусть предел интегральной суммы существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, тогда этот предел называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx.$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a, b]$ – *областью* (*отрезком*) *интегрирования*.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx,$ называется *интегрируемой на этом отрезке.*

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Определенный интеграл и неопределенный интеграл – существенно различные понятия:

$\int f(x)dx$ – семейство функций,

$\int_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции (определенное число).

2.2. Классы интегрируемых функций

1. **Теорема (Коши).** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

2. Если функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число точек разрыва, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

3. Если функция $y = f(x)$ ограничена и монотонна на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

2.3. Свойства определенного интеграла

1^0. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

2^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3^0. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

4⁰. Для любого действительного числа c

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

5⁰. Если c – постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a,\ b]$, то $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, т. е. постоянный множитель c можно вынести за знак определенного интеграла.

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $cf(x)$: $\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(c_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\cdot f(c_i)\Delta x_i =$ $= c\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, $cf(x)$ интегрируема на $[a,\ b]$ и справедлива формула $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

Ч. т. д.

6⁰. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,\ b]$, тогда интегрируема на $[a,\ b]$ их сумма (разность) и интеграл от суммы равен сумме (разности) интегралов:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Докажем это свойство.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(c_i)\pm g(c_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7⁰. Если $f(x)\ge 0$ на отрезке $[a,\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.

8⁰. Если на отрезке $[a,\ b]$ выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

9⁰. Если $c\in[a,\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

10^0. Теорема о среднем. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое значение c из отрезка $[a, b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигнет своего наименьшего и наибольшего значения $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, таким образом, $m \le f(x) \le M$. По свойству 8 $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$.

По свойству 4 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Разделим на $(b - a)$, тогда $m \le \dfrac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \le M$.

Положим $f(c) = \dfrac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ и получим $\int_a^b f(x)dx =$ $= f(c)(b-a)$.

Ч. т. д.

Геометрический смысл теоремы о среднем

Найдется такая точка c, что площадь под кривой будет равна площади прямоугольника (рис. 4).

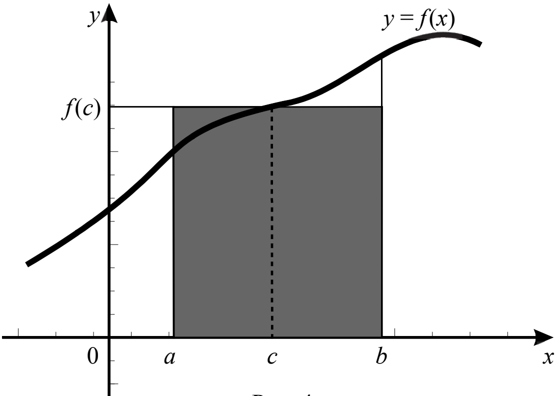


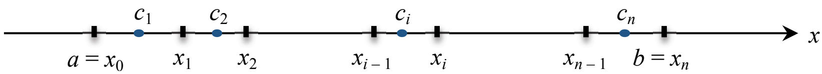
Рис. 4

2.4.Формула
Ньютона – Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на $[a, b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0$, x_1, ... $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) на n частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$.



Рассмотрим тождество $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \ldots + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_1) - F(x_0))$. Преобразуем каждую разность в скобках по формуле Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Получим $F(b) - F(a) = F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(c_1) \cdot (x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Тогда $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$, где c_i есть некоторая точка интервала (x_{i-1}, x_i). Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a, b]$. Переходя в равенстве $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ к пределу при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, получаем $F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$, т. е. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Равенство $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ называется *формулой Ньютона – Лейбница* ($F(x)\Big|_a^b$ – принятая форма записи).

Примеры. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) = \frac{8}{3}.$

2) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-2}^2 = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}(-2) = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 2 =$
$= 2\operatorname{arctg} 2.$

3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \begin{bmatrix} \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \\ \ln e^2 = 2,\ \ln e = 1 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Самостоятельная работа

Найти интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8} + 2\left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1\right) \approx 0.38.$

2) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ Ответ: 2.

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx.$ Ответ: $\frac{4}{3}.$

4) $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx.$ Ответ: $\frac{848}{105}.$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$ Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1.$

2.5. Геометрические приложения определенного интеграла

2.5.1. Вычисление площадей плоских фигур

1) Пусть функция $f(x) \ge 0$ и непрерывна на отрезке $[a, b]$. По геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равна $\int_a^b f(x)dx$ (рис. 5):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

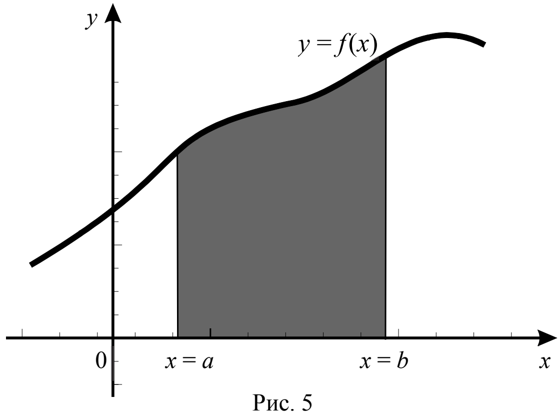


Рис. 5

2) Пусть $f(x) \le 0$ и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Отразим $y = f(x)$ относительно оси Ox, получаем функцию $y = -f(x)$ (рис. 6).

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

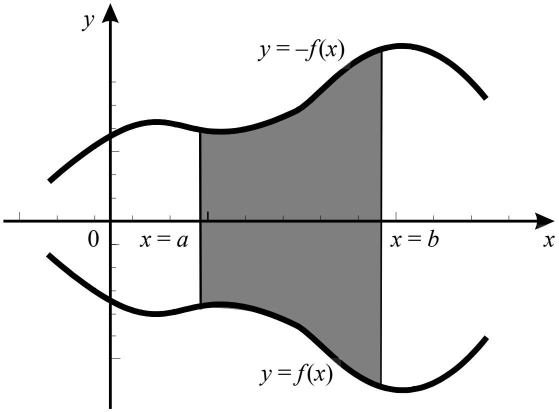


Рис. 6

3) Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $f_2(x) \ge f_1(x)$. Тогда площадь S, заключенную между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 7, 8), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

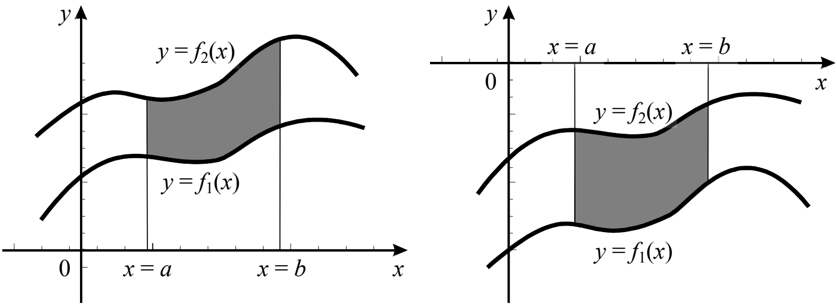


Рис. 7

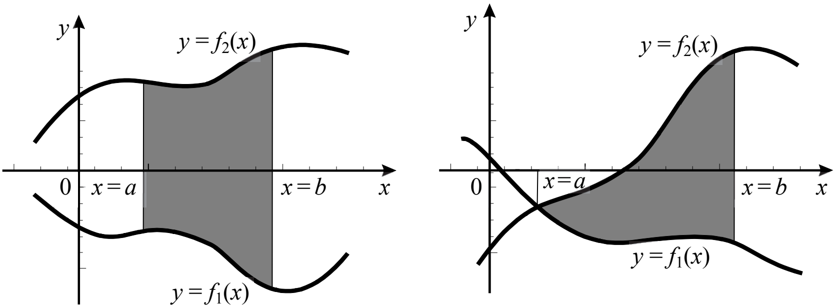


Рис. 8

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Оy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить уже известные формулы (рис. 9, *а*).

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Оy и непрерывной кривой $x = g(y) \geq 0$ (рис. 9, *б*), то ее площадь находится по формуле $S = \int_c^d g(y)dy$.

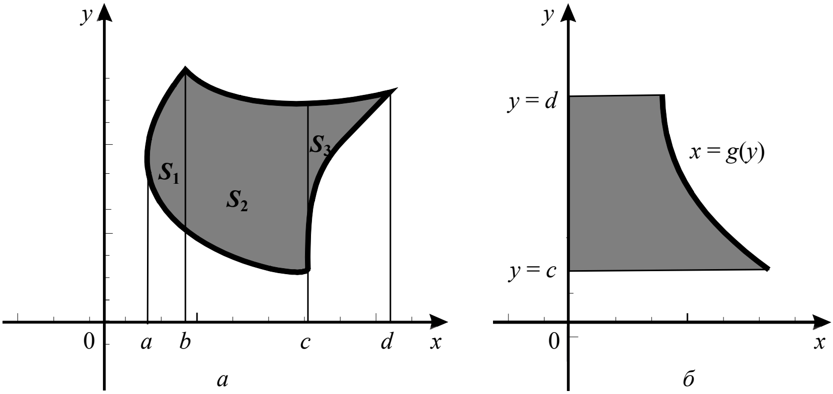


Рис. 9

Примеры.

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$.

Найдем точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части функций и решим уравнение $x^2 - 2x + 3 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. На рис. 10 представлены графики функций $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$ и выделена фигура, площадь которой нужно найти.

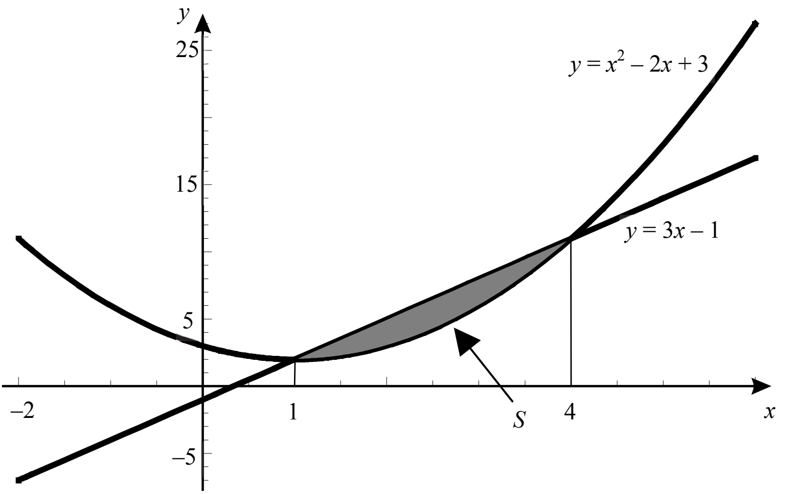


Рис. 10

Теперь запишем интеграл для нахождения площади: $S=\int_1^4(3x-1-x^2+2x-3)dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx=$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right)\Bigg|_1^4=-\frac{1}{3}4^3+\frac{5}{2}4^2-4\cdot4+\frac{1}{3}1^3-\frac{5}{2}1^2+4\cdot1=4.5.$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0.5x-2.5$ и $y=-2/x$.

Найдем точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части функций и решим уравнение

$0.5x-2.5=-2/x \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1$ и $x_2=4$.

На рис. 11 представлены графики функций $y=0.5x-2.5$ и $y=-2/x$ и выделена фигура, площадь которой нужно найти.

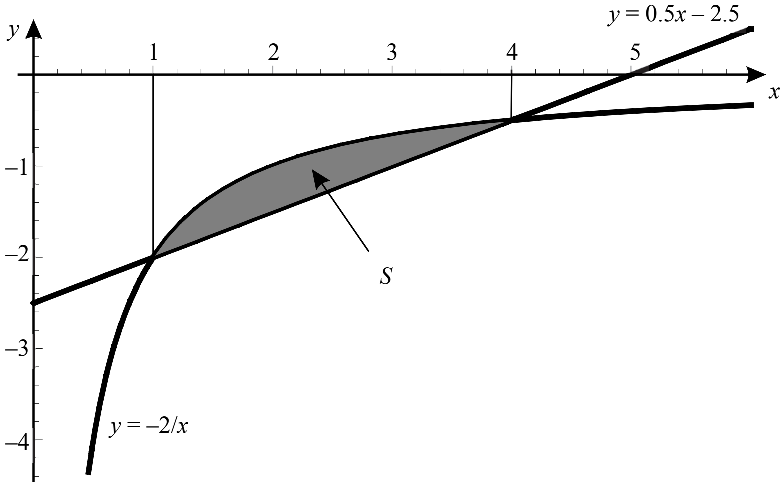


Рис. 11

Теперь запишем интеграл для нахождения площади:

$$S=-\int_1^4\left(\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{x}\right)\right)dx=-\int_1^4\left(\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}+\frac{2}{x}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-2\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=-\frac{1}{4}4^2+\frac{5}{2}4-2\ln|4|+\frac{1}{4}1^2-\frac{5}{2}\cdot1+$$

$$+2\cdot\ln|1|=3.75-2\ln4.$$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$ и $x = 1$. На рис. 12 представлены графики функций $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$ и $x = 1$ и выделена фигура, площадь которой нужно найти.

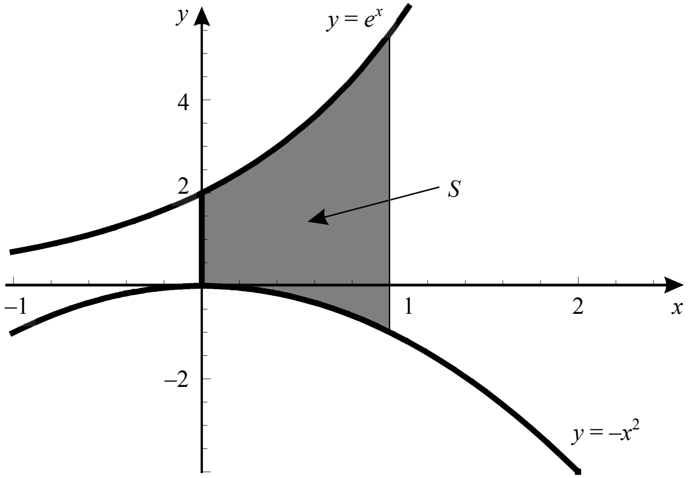


Рис. 12

Запишем интеграл для нахождения площади:

$$S = \int_0^1 2e^x dx + \int_0^1 x^2 dx = 2e^x \Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 2e - 1\frac{2}{3}.$$

Самостоятельная работа

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. Ответ: $\frac{125}{6}$.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 2x$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью Ox. Ответ: 2.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $y = -x$. Ответ: $\frac{32}{3}$.

5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$. Ответ: 0.5.

2.5.2. Вычисление объемов тел вращения

Пусть вокруг оси Оx вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Определение. Полученная от вращения фигура называется *телом вращения.*

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Оx, проведенной через произвольную точку x оси Оx ($x \in [a, b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$ (рис. 13).

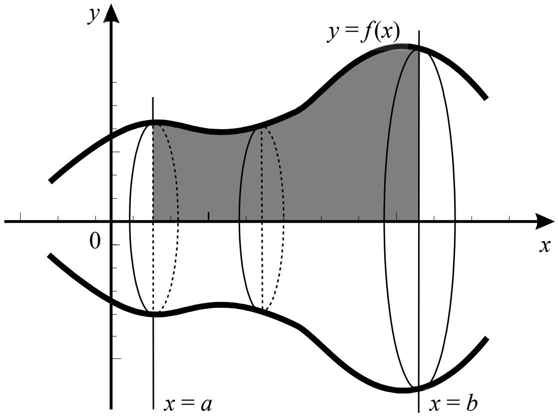


Рис. 13

Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

Объем тела вращения $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$.

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = g(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$ и $y = d$ ($c < d$)

(рис. 14), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Оy, по аналогии с формулой $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$, равен $V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$.

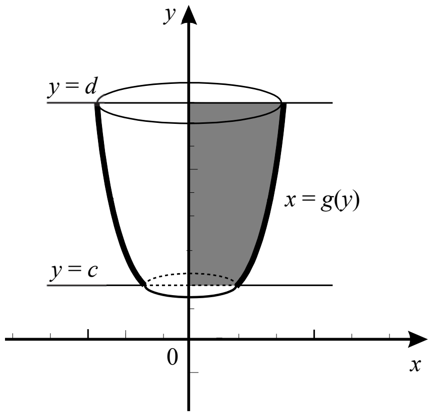


Рис. 14

Примеры.

1) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$ и $y = 4$, вокруг оси Оy (рис. 15).

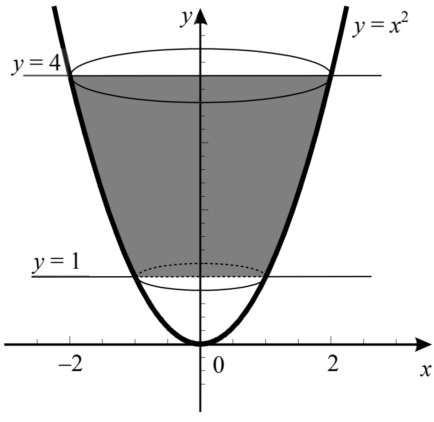


Рис. 15

$$V_y = \pi\int_1^4 y dy = \pi\frac{1}{2}y^2\Big|_1^4 = \frac{15\pi}{2}.$$

2) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ и $x = 0$, вокруг оси Оy (рис. 16, *а*) и Оx (рис. 16, *б*).

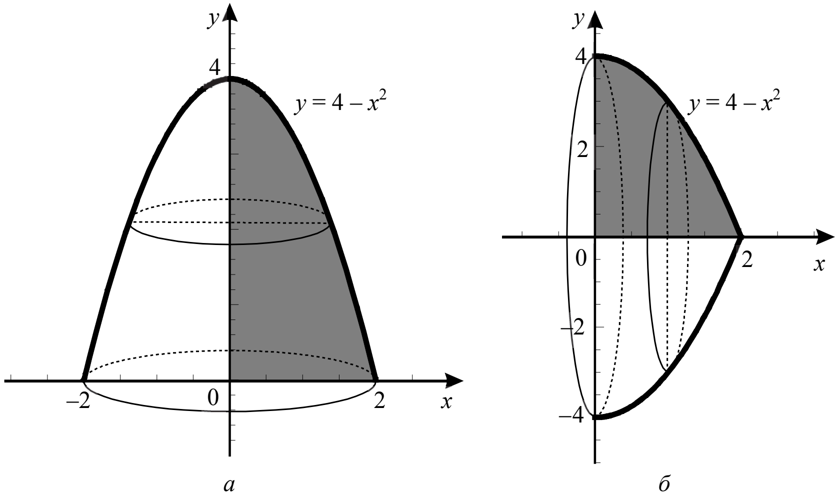


Рис. 16

$$V_y = \pi\int_0^4 (4 - y)dy = \pi\left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^4 = 8\pi.$$

$$V_x = \pi\int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)dx =$$

$$= \pi\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(16\cdot 2 - \frac{8}{3}2^3 + \frac{1}{5}2^5 - 16\cdot 0 - \frac{8}{3}0^3 + \frac{1}{5}0^5\right) = 17\frac{1}{5}\pi.$$

3) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x^3$, вокруг оси Оy (рис. 17, *а*) и Оx (рис. 17, *б*).

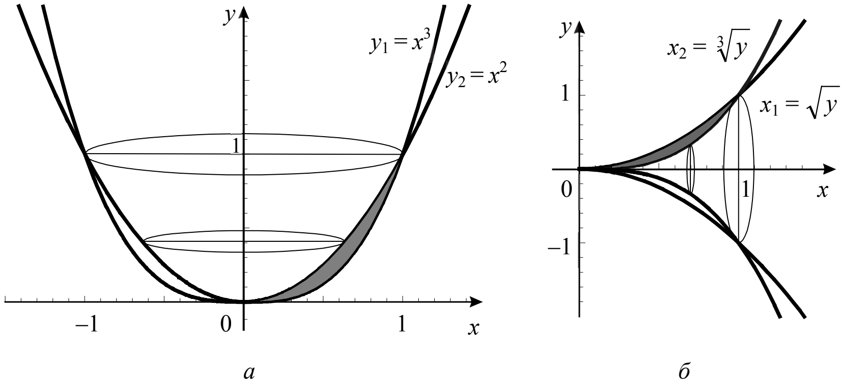


Рис. 17

$$V_{x_2} - V_{x_1} = \pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}dy - \pi\int_0^1 ydy = \pi\left(\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

$$V_{y_2} - V_{y_1} = \pi\int_0^1 x^4 dx - \pi\int_0^1 x^6 dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{35}.$$

Самостоятельная работа

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной оси координат:

1) $y = x^{\frac{2}{3}},\ y = 1,\ x = 0,\ \mathrm{O}x.$ Ответ: $\frac{4\pi}{7}.$

2) $y = \sin x,\ y = 0\ (0 \le x \le \pi),\ \mathrm{O}x.$ Ответ: $\frac{\pi}{2}.$

3) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1,\ \mathrm{O}x.$ Ответ: $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$

4) $y = 2x - x^2,\ y = 0,\ \mathrm{O}x.$ Ответ: $\frac{16\pi}{15}.$

5) $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0,\ \mathrm{O}y.$ Ответ: $\frac{96\pi}{5}.$

2.6. Несобственные интегралы*

Определение. Определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв, называется *несобственным интегралом*.

2.6.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом I рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

По определению $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*.

Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

В этом случае интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (рис. 18).

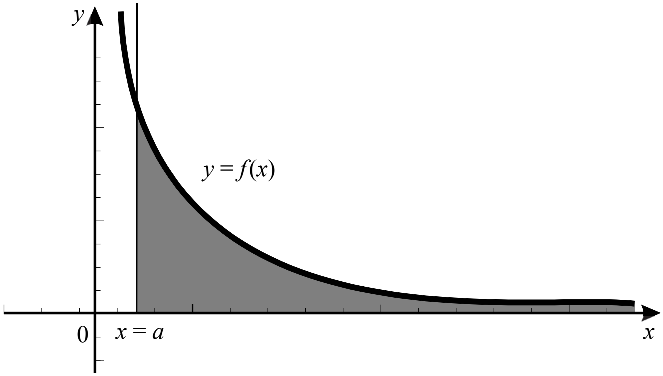


Рис. 18

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2) $$\int_{-\infty}^0 \sin x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^0 \sin x dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\cos x\Big|_a^0\right) =$$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}(-\cos 0 + \cos a)$ – предел не существует $\Rightarrow$ интеграл расходится.

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

Самостоятельная работа

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}.$

2) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$. Ответ: 0.5.

3) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$. Ответ: 0.5.

4) $\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} dx$. Ответ: расходится.

5) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$. Ответ: 0.5.

2.6.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом II рода* и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

По определению $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Если предел в правой части равенства существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *сходится.*

Если же $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *расходится.*

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл II рода определяется формулой $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части равенства, сходятся, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся.

В случае когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл II рода $\int_a^b f(x)dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

Примеры. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_\varepsilon^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty \Rightarrow$ интеграл расходится.

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3) $$\int_0^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x\ln x} =$$

$$= \left[\left.\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\big|\ln|x|\big|\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\big|\ln|x|\big|\Big|_\varepsilon^2\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2 - \ln|\ln\varepsilon|\right) = \infty \Rightarrow \text{интеграл расходится.}$$

Самостоятельная работа

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Ответ: 1.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Ответ: 2.

3) $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ Ответ: $14\frac{4}{7}$.

4) $\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$ Ответ: $\frac{8}{3}$.

5) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^5}.$ Ответ: расходится.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Основные понятия

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение, связывающее независимые переменные, искомые функции и их производные или дифференциалы.

Обозначение. $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ – *дифференциальное уравнение*, y – искомая функция.

Определение. *Решить дифференциальное уравнение* – значит найти функцию $y = \phi(x)$, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в верное равенство.

Определение. *Порядком уравнения* называется максимальный порядок n входящей в него производной (или дифференциала).

Пример. $y^{(4)} - y + x = 0$ – уравнение четвертого порядка.

Определение. *Общим решением* уравнения $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ называется функция $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$, обращающая уравнение $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ в верное равенство ($C_1, C_2, \dots C_n$ – произвольные постоянные).

Пример.

1) $y(x) = e^x + x + 2$ – решение уравнения $y''' = e^x$.

2) $y(x) = x^4 + x^2$ – решение уравнения $xy' - 2y = 2x^4$.

Определение. *Частным решением уравнения* $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots C_n$.

Пример.

1) $y(x) = e^x + x$ – частное решение уравнения $y^{(4)} - y + x = 0$.

2) $y(x) = \sin x + x$ – частное решение того же дифференциального уравнения $y^{(4)} - y + x = 0$.

Определение. Графическое изображение решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Определение. Общее решение – это *семейство интегральных кривых*.

К дифференциальным уравнениям приводят ряд задач экономики, физики, биологии, химии и т. д.:

– закон изменения численности населения с течением времени (протекание демографического процесса);

– закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря;

– «закон размножения бактерий» (зависимость массы бактерий от времени);

– «закон охлаждения тел» (закон изменения температуры тела в зависимости от времени).

3.2. Уравнения первого порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение $F(x, y, y') = 0$, где x – независимая переменная; $y(x)$ – неизвестная функция.

Определение. Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно производной y', то его записывают в виде $y' = f(x, y)$ и называют *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ или в дифференциальной форме: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Общее решение уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ имеет вид $y = \phi(x, C)$. Его частным решением является функция вида $y = \phi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \phi(x, C)$ при конкретном $C = C_0$.

Определение. Если общее решение найдено в неявном виде, т. е. $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом*, а $\Phi(x, y, C_0) = 0$ – *частным интегралом*.

3.2.1. Задача Коши

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области D, точка $(x_0, y_0) \in D$. Требуется найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в области D функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f_y'(x, y)$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y = \phi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

3.2.2. Решение некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде $y' = f(x)g(y)$ или $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Решим уравнение $y' = f(x)g(y)$.

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow dy = f(x)g(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируя, получим общий интеграл $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$

Решим уравнение $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Делим на $f_2(x)g_1(y)$ обе части уравнения: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy.$

Интегрируя, получим общий интеграл $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy.$

В обоих случаях возможна потеря решений: деление на функцию может привести к уравнению, которое неэквивалентно данному. Эти решения могут содержаться в общем решении, но могут и не содержаться в нем; последнее может случиться, если на этих решениях нарушаются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Часто при решении дифференциальных уравнений мы довольно свободно обращаемся с произвольными постоянными, меняя, например, C на $\ln C$ и не меняя имя постоянной. Рассмотрим пример, который показывает, что такое обращение с произвольной постоянной допустимо:

$$y' = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = ky \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dy}{y} = kdx \Leftrightarrow \ln|y| = kx + C \Leftrightarrow \ln|y| =$$

$$= \ln e^{kx} + \underbrace{\ln C_1}_{C} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln\left(C_1 e^{kx}\right) \Leftrightarrow |y| = C_1 e^{kx} \Leftrightarrow y = \pm C_1 e^{kx} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y = C_2 e^{kx}$, здесь $C \in \mathrm{R}$, $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$, $C_2 = \pm C_1$, $C_2 \neq 0$.

Мы делили на $y \neq 0$, но $y = 0$ является решением исходного уравнения $0' = k \cdot 0$. Таким образом, можно определить новую произвольную постоянную как $C_4 = \begin{cases} \pm C_1, & C_1 > 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow C_4 \in \mathrm{R}$. Поэтому при решении дифференциального уравнения можно не вводить новую переменную при каждых равносильных преобразованиях, сохраняя имя переменной C, но иногда подразумевая разные C.

Примеры.

1) Решить уравнение $y' = x(y - 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y-1) \overset{y\neq 1}{\Rightarrow} \frac{dy}{y-1} = xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int xdx \Leftrightarrow \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C.$$

При такой форме записи общего интеграла решение $y = 1$ потеряно.

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow y - 1 = e^{\frac{x^2}{2} + \ln C} \Rightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1.$$

Общее решение $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$ содержит частное решение $y = 1$ при $C = 0$.

2) Найти решение задачи Коши $(xy^2 - x)dx = (x^2y - y)dy$, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 2$.

$$x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 1)dy \overset{y\neq\pm 1,\ x\neq\pm 1}{\Rightarrow} \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{ydy}{y^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{xdx}{x^2-1} = \int \frac{ydy}{y^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \frac{1}{2}\ln C \Rightarrow \ln\left|y^2-1\right|dx =$$

$$= \ln C\left|x^2 - 1\right| \Leftrightarrow y^2 = (x^2-1)C + 1.$$

При такой форме записи общего интеграла решения $x = \pm 1$, в то время как решения $y = \pm 1$ входят в общий интеграл при $C = 0$.

Найдем частное решение при условии $y(2) = 2$. Для этого поставим значения $x = 2$ и $y = 2$ в общее решение и найдем значение произвольной постоянной C: $2^2 = (2^2 - 1)C + 1 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1$. Тогда решением задачи Коши является $y^2 = (x^2 - 1) + 1$.

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $xydx + (x + 1)dy = 0$. Ответ: $y = Ce^{-x}(x + 1)$, $x = -1$.

2) $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$. Ответ: $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, $x = 0$.

3) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$. Ответ: $y = (x - 2)^3$, $y = 0$.

Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным дифференциальным уравнением*, если оно может быть представлено в виде $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $u(x)$ заменой $\dfrac{y(x)}{x} = u$ или $y(x) = xu$.

Подставляя в уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ замену $y = xu$ и $y' = u + xu'$, получим $u + xu' = f(u)$. Новое уравнение $xu' = f(u) - u$ является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Это общий интеграл уравнения относительно переменных x, $u(x)$.

Примеры.

1) $$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = xu \\ y' = u + xu' \end{array}\right] \Leftrightarrow u + xu' = u + \frac{1}{u} \Leftrightarrow xu' = \frac{1}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow uu' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow u\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int udu = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 2\ln|Cx| \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \pm\sqrt{2\ln|Cx|} \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}.$$

2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0 \Leftrightarrow (2xy-y^2)dx=x^2dy \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{2xy-y^2}{x^2} \Leftrightarrow y'=2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=xu \\ y'=u+xu' \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xu'=u-u^2 \overset{u\neq 0,\ u\neq 1}{\Rightarrow} \frac{u'}{u-u^2}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{u-u^2}=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{du}{u-u^2}=\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{u-u^2}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{1-u}=\dfrac{A-Au+Bu}{u-u^2}=\dfrac{A+(-A+B)u}{u-u^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ -A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{u-u^2}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{1-u}. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u|-\ln|1-u|=\ln|x|+C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{u}{1-u}\right|=\ln(Cx) \Leftrightarrow \frac{u}{1-u}=Cx \Leftrightarrow \frac{y/x}{1-y/x}=Cx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x-y}=Cx \Leftrightarrow y=Cx(x-y).$$

Общее решение $y = Cx(x - y)$ содержит частное решение $y = 0$ при $C = 0$, но не содержит $y = x$.

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0$. Ответ: $y = Cx^2 - x$, $x = 0$.

2) $y^2 + x^2y' = xyy'$. Ответ: $y = Ce^{y/x}$.

3) $xy' = y - xe^{y/x}$. Ответ: $y = -x\ln\ln Cx$.

Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *линейным однородным уравнением*, если неизвестная функция $y(x)$ и ее производная $y'(x)$ входят в уравнение в первой степени: $y'(x) + p(x)y(x) = 0$, где $p(x)$ – непрерывная функция.

Линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными $y'(x) = -p(x)y(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y(x) \overset{y\neq 0}{\Rightarrow}$

$$\overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{y(x)} = -\int p(x)\,dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = -\int p(x)dx + C \Leftrightarrow y(x) =$$

$$= e^{-\int p(x)\,dx + C} \Leftrightarrow y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *линейным неоднородным уравнением*, если неизвестная функция $y(x)$ и ее производная $y'(x)$ входят в уравнение в первой степени: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ – непрерывные функции.

Существует два способа решения линейных уравнений первого порядка. Рассмотрим их.

Первый способ. Представим $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)v(x)$, тогда производная равна $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Уравнение приводится к виду $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $uv' + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Уравнение $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$ решаем в два этапа.

Первый этап. Находим функцию $v(x)$ как частное решение уравнения с разделяющимися переменными $v' + p(x)v = 0$.

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Не вводим в это решение произвольную постоянную C, достаточно найти одну функцию $v(x)$, обнуляющую слагаемое со скобками в уравнении $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.

Второй этап. Находим $u(x)$ из уравнения $u'v = q(x)$.

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Leftrightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Тогда общее решение уравнения $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Второй способ. На первом этапе решаем линейное однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Вторым этапом является применение *метода вариации произвольной постоянной.* Суть метода заключается в представлении произвольной постоянной в виде функции от независимой переменной $C = C(x)$ и нахождении функции $C(x)$, удовлетворяющей неоднородному уравнению.

Первый этап. Решение однородного уравнения $y(x)=Ce^{-\int p(x)\,dx}$ содержит произвольную постоянную как сомножитель.

Второй этап. Представим произвольную постоянную в виде $C = C(x)$, тогда $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow y'(x) = \left(C(x)e^{-\int p(x)\,dx}\right)' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'(x) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)\left(e^{-\int p(x)dx}\right)' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} -$$

$$-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляем в исходное однородное уравнение

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Leftrightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Подставляем найденную функцию $C(x)$ в решение $y(x)$: $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)\,dx}$. Очевидно, что полученное решение совпадает с решением, полученным первым способом.

Примеры.

1) $y' + 2xy = 2x$.

Первый этап. Решим соответствующее однородное уравнение $y' + 2xy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -2xy \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{dy}{y} = -2xdx \Leftrightarrow \int\dfrac{dy}{y} = -2\int xdx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -2\cdot\frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow y = Ce^{-x^2}.$$

Второй этап. Представим $C = C(x) \Rightarrow y = C(x)e^{-x^2} \Rightarrow$ $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$ и подставим в исходное неоднородное уравнение $C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x \Leftrightarrow C'(x)e^{-x^2} =$ $= 2x \Leftrightarrow C'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \Leftrightarrow C(x) = 2\int x \cdot e^{x^2} dx \Leftrightarrow C(x) = \int e^{x^2} d(x^2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow C(x) = e^{x^2} + C.$

Тогда решение исходного уравнения примет вид $y = \left(e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = 1 + Ce^{-x^2}$.

2) $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}, \; y(0) = 1.$

Первый этап. $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0 \overset{y \neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx \Leftrightarrow \int \dfrac{dy}{y} =$ $= \int \operatorname{tg} x dx \Leftrightarrow$

$$\left| \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|\cos x| + C \right. .$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Leftrightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{\mathrm{C}}{\cos x}\right| \Leftrightarrow y = \frac{\mathrm{C}}{\cos x}.$$

Второй этап. $C = C(x) \Rightarrow y = \dfrac{C(x)}{\cos x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{C(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x)\cos x + C(x)\sin x - C(x)\sin x = \cos x \Leftrightarrow C'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = x + C.$$

Тогда решение неоднородного уравнения $y = \dfrac{x + C}{\cos x}$.

Найдем решение задачи Коши: $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{x+1}{\cos x}.$$

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $xy' - 2y = 2y^4$. Ответ: $y = (x^2 + C)x^2$.

2) $x^2 y' + xy + 1 = 0$. Ответ: $y = \dfrac{1}{x}(C - \ln|x|)$.

3) $(x + y^2)dy = ydx$. Ответ: $x = (y + C)y,\ y = 0$.

4) $(x + 2y^3)dy = ydx$. Ответ: $x = y^3 + Cy,\ \ y = 0$.

5) $dy = (x - y + 1)dx$. Ответ: $y = Ce^{-x} + x$.

Уравнение Бернулли*

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *уравнением Бернулли*, если оно может быть представлено в виде $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^m(x)$, где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение линейно, при $m = 1$ – с разделяющимися переменными).

Есть несколько способов решения уравнения Бернулли.

Первый способ. Уравнение Бернулли сводится к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$ (при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$). Получаем $z' = (1 - m)y^{-m}y' \Rightarrow y^{-m} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-m}$. Делим уравнение $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^m(x)$ на y^m и получаем $y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$. Таким образом, имеем линейное уравнение $\dfrac{z'}{1-m} + p(x) = q(x)$.

Пример.

$xy' - y = y^2 \ln x$ (уравнение Бернулли, $m = 2$).

Подстановка $z = y^{1-2} \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} z = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{z} \Rightarrow y' = -\dfrac{z'}{z^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{\ln x}{z^2} \Rightarrow xz' + z = -\ln x.$$

Получили линейное уравнение: $xz' + z = -\ln x \Rightarrow z = uv \Rightarrow$ $\Rightarrow z' = u'v + v'u \Rightarrow x(u'v + v'u) + uv = -\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow xu'v + xv'u + uv = -\ln x \Rightarrow xu'v + u(xv' + v) = -\ln x \Rightarrow xv' + v = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow xv' = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xu'\frac{1}{x} = -\ln x \Rightarrow u' = -\ln x \Rightarrow du = -\ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int du = -\int \ln x dx \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \ln x = m \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dm \\ dx = dn \Rightarrow x = n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = -x\ln|x| + \int \frac{xdx}{x} \Leftrightarrow u = -x\ln|x| + x + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{x}(-x\ln x + x + C) \Leftrightarrow y = \frac{1}{z} \Leftrightarrow y = \frac{-x}{x\ln x - x + C}.$$

Функция $y = 0$ является решением, но не входит в общее решение.

Второй способ. Можно сразу решать уравнение Бернулли методом, которым решаются линейные уравнения, т. е. заменой $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, тогда уравнение примет вид $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)u^m v^m \Rightarrow u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)u^m v^m \Rightarrow$

$$\Rightarrow v' + p(x) = 0 \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow u'v = q(x)u^m v^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)e^{-m\int p(x)dx}u^m \Rightarrow u' = q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}u^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx \Rightarrow \frac{1}{(1-m)u^{m-1}} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx.$$

Из этого выражения находим $u(x)$, и $y(x) = u(x)v(x)$.

Пример. $xy' - y = y^2\ln x$ (уравнение Бернулли, $m = 2$).

Представим функцию $y(x)$ в виде $y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(u'v + v'u) - uv = (uv)^2\ln x \Rightarrow xu'v + xv'u - uv = (uv)^2\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow xu'v + u(xv' - v) = (uv)^2\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow xv' - v = 0 \Rightarrow xv' = v \Rightarrow xdv = vdx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x \Rightarrow v = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xu'x = (ux)^2 \ln x \Rightarrow x^2 u' = u^2 x^2 \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 (u' - u^2 \ln x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ или } u' - u^2 \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = u^2 \ln x \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \ln x dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = x \ln x - x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{-1}{x \ln x - x + C} \Rightarrow y = \frac{-x}{x \ln x - x + C}.$$

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $y' + 2y = y^2 e^x$. Ответ: $\frac{1}{y} = e^x + Ce^{2x}$, $y = 0$.

2) $xy^2 y' = x^2 + y^3$. Ответ: $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.

3) $3y^2 y' + y^3 + x = 0$. Ответ: $y^3 = 1 - x + Ce^{-x}$.

4) $y' - 2xy = 2x^3 y^2$. Ответ: $\frac{1}{y} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$, $y = 0$.

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если оно может быть представлено в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ при условии, что $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$.

Выполнение условия $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ означает, что существует функция $F(x, y)$ такая, что $dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Тогда $dF(x, y) = 0$ и при условии нахождения вида функции $F(x, y)$ общий интеграл уравнения будет иметь вид $F(x, y) = C$.

Для этого запишем равенство $F_x'(x, y) = M(x, y)$, следовательно, $F(x, y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \Rightarrow F_y'(x, y) = \left(\int M(x,y)dx\right)_y' + \varphi'(y)$.

С другой стороны, $F_y'(x, y) = N(x, y)$, тогда $\left(\int M(x,y)dx\right)_y' + \varphi'(y) = N(x, y)$, откуда находим функцию $\varphi(y)$ и можем записать общий интеграл уравнения.

Пример. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. В уравнении $M(x, y) = 2xy$ и $N(x, y) = x^2 - y^2$, т. е. $M'_y(x, y) = 2x \equiv 2x = N'_x(x, y)$, значит, это уравнение в полных дифференциалах. Тогда $F'_x(x, y) = 2xy \Leftrightarrow F(x, y) = 2\int xydx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(x, y) = x^2y + \varphi(y) \Rightarrow F_y'(x,y) = x^2 + \varphi'(y)$, с другой стороны, $F_y'(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = x^2 + \varphi'(y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3$.

Следовательно, $F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$, тогда общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = C$.

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$. Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$.

2) $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$. Ответ: $x - y^2\cos^2 x = C$.

3) $3x^2\left(1 + \ln y\right)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$. Ответ: $(1 + \ln y)x^3 - y^2 = C$.

3.3. Уравнения высших порядков

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$, где x – независимая переменная, $y(x)$ – неизвестная функция.

Определение. Если уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ можно разрешить относительно производной y'', то его записывают в виде

$y'' = f(x, y, y')$ и называют *дифференциальным уравнением второго порядка, разрешенным относительно производной*.

Определение. *Общим решением уравнения* $F(x, y, y', y'') = 0$ называется такая функция $y = \phi(x, C_1, C_2)$, обращающая уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ в верное равенство.

Определение. *Частным решением уравнения* $F(x, y, y', y'') = 0$ называется любая функция $y = \phi(x, C'_1, C'_2)$, полученная из общего решения $y = \phi(x, C_1, C_2)$ при конкретном C'_1 и C'_2.

3.3.1. Задача Коши (задача с начальным условием)

Пусть функция $f(x, y, y')$ определена в области D, точка $(x_0, y_0, y'_0) \in D$. Требуется найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в области D функция $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y, y')$ и $f'_y(x, y, y')$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \phi(x)$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.

3.3.2. Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n-кратным интегрированием.

Пример. Решить уравнение $y^{(4)} = \sin x$.

Проинтегрируем последовательно четыре раза:

$$y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1;$$

$$y'' = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int(-\sin x + C_1 x + C_2)dx = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int(\cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3)dx = \sin x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и ее младшие производные

Порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \dots y^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $y(x)$ и $k - 1$ младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на k единиц введением новой неизвестной функции $z(x) = y^{(k)}(x)$.

Тогда $z' = y^{(k+1)}$, $z'' = y^{(k+2)}$, … $z^{(n-k)} = y^{(n)}(x)$, и относительно $z(x)$ уравнение примет вид $F(x, z, z', z'', \dots z^{(n-k)}) = 0$, т. е. будет уравнением $n - k$-го порядка.

После нахождения $z(x)$ последовательным интегрированием решается уравнение $y^{(k)} = z(x)$.

Пример. Решить уравнение $x^6 y''' - 2x^5 y'' = (y'')^3/2$.

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнения, – вторая, поэтому делаем замену искомой функции $z(x) = y''(x)$.

Тогда $y''' = z''$ и уравнение примет вид $x^6 z' - 2x^5 z = (z)^3/2$ – уравнение Бернулли.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение, в которое неизвестная функция $y(x)$ и ее производные входят линейно, т. е. в первой степени: $y'' + py' + qy = r(x)$, где p и q – const, а $r(x)$ – некоторая функция.

Определение. Если $r(x) = 0$, то уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называется *однородным* (в противном случае – *неоднородным*).

Рассмотрим сначала решение однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$. Предположим, что решения этого уравнения имеют вид $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$ и $y'' = k^2e^{kx}$. Подставляем эти выражения для производных в $y'' + py' + qy = 0$, получаем $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ и делим обе его части на e^{kx}. Получаем квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$.

Определение. Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Характеристическое уравнение может иметь два различных корня, два совпадающих корня, а может не иметь действительных корней.

Теорема. 1) Пусть характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет разные действительные корни $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$), тогда общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид $y_0 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, где C_1, C_2 – const.

2) Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет два совпадающих корня $k_1 = k_2$ ($D = 0$), тогда общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2x)e^{k_2x}$, где C_1, C_2 – const.

3) Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + py' + qy = 0$ не имеет действительных корней $k_{1,2} = \alpha + \beta i$ ($D < 0$), тогда общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид $y_0 = C_1e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2e^{\alpha x}\cos\beta x$, где C_1, C_2 – const.

Примеры.

1) $y'' + 4y' + 5y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5$, тогда решение исходного уравнения $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,\,2} = -2$, тогда решение исходного уравнения $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

3) $y'' + 4y' - 5y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,\,2} = -2 \pm i$, тогда решение исходного уравнения $y = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x$.

4) $y'' - 2y' + y = 0$, $y'(2) = -2$, $y(2) = 1$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,\,2} = 1$, тогда решение исходного уравнения $y = (C_1 + C_2x)e^{x} \Rightarrow y' = C_2e^{x} + (C_1 + C_2x)e^{x}$.

Найдем решение задачи Коши:

$y(2) = (C_1 + 2C_2)e^2 = 1$, $y'(2) = (C_1 + C_2 + 2C_2)e^2 = -2$.

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = e^{-2}, \\ C_1 + 3C_2 = -2e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 7e^{-2}, \\ C_2 = -3e^{-2}. \end{cases}$$

Уравнение задачи Коши имеет вид $y = (7 - 3x)e^{x-2}$.

Рассмотрим теперь решение неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = r(x)$.

Теорема. Общим решением y уравнения является сумма его произвольного частного решения $y_ч$ и общего решения $y_о$ соответствующего однородного уравнения, т. е. $y = y_о + y_ч$.

Метод вариации произвольных постоянных

Находим общее решение $y = C_1y_1 + C_2y_2$ однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, имеющего ту же левую часть, что и исходное уравнение.

Решение уравнения $y'' + py' + qy = r(x)$ находится в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ ($C_1(x)$ и $C_2(x)$ – функции).

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решение системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y'_1 + C_2'y_2' = r(x). \end{cases}$$

Примеры.

1) $y'' - 3y' + 2y = e^x$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, и решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$. Для нахождения решения неоднородной задачи представим произвольные постоянные в виде функций и решим систему уравнений для их нахождения, где $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$.

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_1'(x)2e^{2x} + C_2'(x)e^x = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)2e^x + C_2'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^x = 1, \\ C_2'(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = e^{-x}, \\ C_2'(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -e^{-x} + C_3, \\ C_2(x) = -x + C_4. \end{cases}$$

Тогда $y = (-e^{-x} + C_3)e^{2x} + (-x + C_4)e^x \Leftrightarrow y = C_3e^{2x} + C_4e^x - e^{-x} - xe^x$.

2) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,\,2} = 1$, и решение однородного уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^x$. Для нахождения решения неоднородной задачи представим произвольные постоянные в виде функций и решим систему уравнений для их нахождения, где $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x \Rightarrow y_1' = e^x$, $y_2' = e^x + xe^x$.

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x(1+x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x, \\ -xC_2'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2'(x) = \dfrac{1}{x}, \\ C_1'(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2(x) = \ln|x| + C_3, \\ C_1(x) = -x + C_4. \end{cases}$$

Тогда $y = (\ln|x| + C_3)xe^x + (-x + C_4)e^x = (x\ln|x| + xC_3 + C_4 - x)e^x$.

Самостоятельная работа

Решить уравнение:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Ответ: $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x$.

2) $y''-2y'+y=xe^{2x}$.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x}(-x^2 + 3x - 3)$.

3) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \ln(e^x + 1)(e^{-x} + e^{-2x}) - e^{-x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Интегралы

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{2x^{\frac{3}{2}} - x^2}{x^{\frac{3}{2}}} dx$	8	$\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$
2	$\int \frac{(x-2)^3}{x^2} dx$	9	$\int x \cos 2x dx$
3	$\int 3^{\frac{1-x}{2}} dx$	10	$\int \frac{5-x}{x^2 - 7x + 10} dx$
4	$\int \frac{dx}{\cos^2\left(3 - \frac{2x}{3}\right)}$	11	$\int \frac{2x^2 + 1}{(x-2)^2 (x-1)} dx$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - 11}$	12	$\int \sin 2x \cos x dx$
6	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 2}}{x} dx$	13	$\int \sin 2x \cos^2 x dx$
7	$\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+2}}$	14	$\int \frac{dx}{2 - 3\cos x + \sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $yx = 4$ и $2x + y = 6$;

б) $y = 2 - x$ и $y = x^2 - 6x + 8$;

в) $y = \cos \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y=\sqrt{x+2}$, $y=0$, $x=-2$ и $x=2$.
4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}+2x}{x^3}dx$; б) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}dx$.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

1	$\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-3x}{x^2}dx$	8	$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$
2	$\int\frac{(2x-1)^2\,dx}{x^2}$	9	$\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
3	$\int 2^{3x}\,dx$	10	$\int\frac{3x-2}{x^2-5x+6}dx$
4	$\int 5\sin\frac{x}{2}dx$	11	$\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$
5	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$	12	$\int\sin^2 2x\,dx$
6	$\int\frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)^2}$	13	$\int\sin^2 3x\sin\frac{x}{2}dx$
7	$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$	14	$\int\frac{dx}{\cos x-3\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = 6x - x^2$ и $y = x^2 - 2x$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ и $y = 2 - x$;

в) $y = \sin x - 1$, $y = -1$ и $x = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

1	$\displaystyle\int \frac{x-3x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx$	6	$\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$
2	$\displaystyle\int \frac{(x+1)^2 dx}{2x^2}$	7	$\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+3}}$
3	$\displaystyle\int e^{\frac{x}{4}+2}dx$	8	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-7x+13}$
4	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(3-3x)}$	9	$\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$
5	$\displaystyle\int \frac{dx}{6+x^2}$	10	$\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2+5x+4}dx$

11	$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx$	13	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
12	$\int \cos^2 3x dx$	14	$\int \frac{dx}{4 - 4\cos x + 3\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = 3^x$ и $y = 8x + 1$;

б) $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$;

в) $y = \cos x + 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = \frac{2}{x}$, $y = 2$ и $x = 2$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \frac{(\ln x - 1)^3}{x} dx$; б) $\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2} dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}}$; б) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} dx$.

Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{\sqrt{x^3} - 5x}{x^2} dx$	4	$\int \cos(2x - 1) dx$
2	$\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$	5	$\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}$
3	$\int e^{\frac{x-5}{3}} dx$	6	$\int \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^2 + 2x + 3}} dx$

7	$\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$	11	$\int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx$
8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	12	$\int \cos 3x \sin x dx$
9	$\int x^2 e^{2x} dx$	13	$\int \cos^4 2x dx$
10	$\int \frac{5-4x}{x^2+3x+2}dx$	14	$\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:
   а) $y = x^4$, $y = 0$ и $y = x$;
   б) $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 2x$;
   в) $y = \sin x + \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$ и $x = -\frac{\pi}{3}$.
3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями $y = \sqrt{x}+1$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 4$.
4. Вычислить определенные интегралы:

   а) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-3x^3+1}dx$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg} 2x dx$.
5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

   а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{6x}-1}}$;   б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}dx$.

Вариант 5

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x^{\frac{5}{4}}-2x}{x^{\frac{1}{4}}}dx$	2	$\int \frac{(x+2)^3 dx}{2x^2}$

3	$\int 2^{3x+1}dx$	9	$\int x\sin^2 x dx$
4	$\int \frac{dx}{\cos^2(3-2x)}$	10	$\int \frac{2-3x}{x^2-4x+3}dx$
5	$\int \frac{dx}{3-x^2}$	11	$\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$
6	$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx$	12	$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$
7	$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x-2}}$	13	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$
8	$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$	14	$\int \frac{dx}{4\cos x-6\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:
   а) $y = x^2$, $y = 4x - 4$ и $y = -4x - 4$;
   б) $y = 2 - 2x$ и $y = x^2 - 5x + 4$;
   в) $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $y = 0$.
3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = e^x - 1$, $y = e - 1$ и $x = 0$.
4. Вычислить определенные интегралы:

   а) $\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+2\right)^2\cos\frac{x}{2}dx$; б) $\int\limits_0^1 \ln^2 x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

   а) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; б) $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3x+2}}dx$.

Вариант 6

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x - 7\sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx$	8	$\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2}$
2	$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x} dx$	9	$\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$
3	$\int \frac{1}{e^{3x-1}} dx$	10	$\int \frac{4 - 6x}{x^2 - 9x + 8} dx$
4	$\int \sin(3x - 2) dx$	11	$\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6}}$	12	$\int \cos \frac{x}{2} \sin x dx$
6	$\int x^2 e^{2 - 3x^3} dx$	13	$\int \cos^3 1.5x dx$
7	$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x+2}}$	14	$\int \frac{dx}{3 + 3\cos x + 5\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = 2^x$, $x = -1$ и $y = -x + 3$;

б) $y = -x^2$ и $y = x^2 - 4x$;

в) $y = \operatorname{tg} x - 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$ и $y = 0$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^4}}$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{2x+1}}dx$.

Вариант 7

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x^{\frac{1}{5}}+4}{x^{\frac{6}{5}}}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$
2	$\int \frac{(3x^2+2)^2}{x}dx$	9	$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$
3	$\int e^{5-3x}dx$	10	$\int \frac{2x-7}{x^2+6x+5}dx$
4	$\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3}+4\right)}$	11	$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^4-81}dx$
5	$\int \frac{dx}{10+x^2}$	12	$\int \cos^2(x+1)dx$
6	$\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}dx$	13	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$
7	$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-2}$	14	$\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y=2^x$, $x=2$ и $y=\frac{1}{2}x+1$;

б) $y=x^2+4$, $y=4x$ и $x=0$;

в) $y=\operatorname{ctg} x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y=\dfrac{1}{x}$, $y=2$, $y=1$ и $x=0$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x+1)^2}$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 2x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[5]{2-\frac{x}{4}}}dx$.

Вариант 8

1. Вычислить интегралы:

1	$\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3}{2x^2}dx$	8	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$
2	$\displaystyle\int \frac{(2-x)^3 dx}{x^2}$	9	$\displaystyle\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$
3	$\displaystyle\int \frac{1}{7^{-2x-31}}dx$	10	$\displaystyle\int \frac{4x+7}{x^2+6x+8}dx$
4	$\displaystyle\int \sin\left(2-\frac{x}{4}\right)dx$	11	$\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$
5	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$	12	$\displaystyle\int \sin^2(1-x)dx$
6	$\displaystyle\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin x\cos x}dx$	13	$\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$
7	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$	14	$\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = 3^x$, $x = 0$ и $y = -x + 4$;

б) $y = 4x - 2x^2$ и $y = x^2 - 2x$;

в) $y = \operatorname{ctg} x + 1$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ и $x = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\displaystyle\int_1^2 \ln(2x-1)dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[5]{2-4x}}dx$.

Вариант 9

1. Вычислить интегралы:

1	$\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^{\frac{1}{4}}}dx$	8	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$
2	$\displaystyle\int \frac{x^4-4x^2-2}{x}dx$	9	$\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$
3	$\displaystyle\int 3^{5-3x}dx$	10	$\displaystyle\int \frac{5-3x}{x^2-8x+7}dx$
4	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}+4\right)}$	11	$\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$
5	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+7}$	12	$\displaystyle\int \cos 4x \cdot \sin 2x dx$
6	$\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	13	$\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$
7	$\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$	14	$\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y=\dfrac{1}{4}x^3$ и $y=\sqrt{2x}$;

б) $y = 4 - 2x$ и $y = x^2 - 9x + 14$;

в) $y = \cos x - 1$, $y = 0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ и $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y=\sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}x+1)^2}$; б) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-3x}dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_0^3\frac{\sqrt{\arcsin x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{x}{2}+1}}dx$.

Вариант 10

1. Вычислить интегралы:

1	$\displaystyle\int\frac{7\sqrt[6]{x^3}-3x^4}{x^{\frac{1}{2}}}dx$	6	$\displaystyle\int\frac{2e^{\operatorname{arctg}x}-1}{1+x^2}dx$
2	$\displaystyle\int\frac{(x^2+2)^2}{x^3}dx$	7	$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$
3	$\displaystyle\int\frac{1}{4^{2x-3}}dx$	8	$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$
4	$\displaystyle\int\frac{\sin 3x}{3}dx$	9	$\displaystyle\int(x^2-4x+1)e^{-x}dx$
5	$\displaystyle\int\frac{dx}{8-x^2}$	10	$\displaystyle\int\frac{1-2x}{x^2-5x+6}dx$

11	$\int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$	13	$\int \cos^2 2x \sin x dx$
12	$\int \cos 3x \cdot \sin 4x dx$	14	$\int \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:
   а) $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 0$ и $y = 4 - 2x$;
   б) $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4x$;
   в) $y = \sin x - 1$, $y = 0$ и $x = -\frac{\pi}{2}$.
3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.
4. Вычислить определенные интегралы:

   а) $\int_0^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,x^2 dx$; б) $\int_1^2 (x+1)e^x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

   а) $\int_0^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4-x}{4}}}dx$.

Вариант 11

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x^{\frac{5}{2}}-2}{x^{\frac{5}{2}}}dx$	4	$\int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$
2	$\int \frac{(x^4-4x^2-2)}{x^3}dx$	5	$\int \frac{dx}{x^2-7}$
3	$\int 2^{\frac{2x}{5}-1}dx$	6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$

7	$\int \frac{(x+2)dx}{x\sqrt{x-1}}$	11	$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2)}$
8	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$	12	$\int \sin 2x \sin x dx$
9	$\int x(\ln x)^2 dx$	13	$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$
10	$\int \frac{3-5x}{x^2-7x+12}dx$	14	$\int \frac{dx}{3\cos x - 7\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = \frac{5}{x}$ и $y = 6 - x$;

б) $y = 8 - 2x$ и $y = x^2 - 9x + 18$;

в) $y = \cos x - \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$ и $x = 2$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\operatorname{ctg} x + 1)^3 dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_2^4 \ln\frac{x}{2}dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\limits_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3-2x}}dx$.

Вариант 12

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{5\sqrt[3]{x^4}-x}{x^2}dx$	8	$\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$
2	$\int \frac{(1-2x^2)^2}{x^4}dx$	9	$\int x\cos^2 x dx$
3	$\int e^{\frac{4-x}{2}}dx$	10	$\int \frac{3x-5}{x^2-7x+10}dx$
4	$\int 2\sin\left(1-\frac{x}{2}\right)dx$	11	$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$	12	$\int \cos 3x \cos x dx$
6	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{2\sin x-3}}$	13	$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
7	$\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$	14	$\int \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y=\frac{1}{9}x^3$ и $y=\sqrt{3x}$;

б) $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 + 4x$;

в) $y = 2\sin x$, $x=\frac{\pi}{6}$, $y = 0$ и $x=\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y=\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 4$ и $x = 9$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^3}dx$; б) $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$; б) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{1-5x}}dx$.

Вариант 13

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x-3x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx$	8	$\int \frac{dx}{1-3x^2-2x}$
2	$\int \frac{(3x-5)^2 dx}{x}$	9	$\int (x-7)\sin 5x dx$
3	$\int e^{2-2x}dx$	10	$\int \frac{x-2}{x^2-8x+7}dx$
4	$\int \frac{dx}{\sin^2(2x-1)}$	11	$\int \frac{43x+67}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$
5	$\int \frac{dx}{8+x^2}$	12	$\int \cos^2 \frac{3x}{2}dx$
6	$\int \frac{e^{3x}}{5+e^{6x}}dx$	13	$\int \sin^4 x \cos x dx$
7	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-6}}$	14	$\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y=\sqrt{3x}$, $y=6-x$ и $y=0$;

б) $y = 6 - 2x$ и $y = x^2 - 7x + 12$;

в) $y = \text{tg}\, x + 1$, $x = \frac{\pi}{6}$ и $y = 0$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x \cdot \cos x dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-4x}dx$.

Вариант 14

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{\sqrt{x^3}-2x^2}{\sqrt{x}}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$
2	$\int \frac{(x-1)^2-x^3}{x}dx$	9	$\int (3-x^2)e^{3x}dx$
3	$\int 4^{3x-2}dx$	10	$\int \frac{1-2x}{x^2+7x+12}dx$
4	$\int \cos(2x+3)dx$	11	$\int \frac{12}{(x^2-2x+3)(x-2)}dx$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$	12	$\int \sin^2\frac{2x}{3}dx$
6	$\int \frac{\sin 2x}{2+3\cos 2x}dx$	13	$\int \sin x\cos^5 x dx$
7	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-5}}$	14	$\int \frac{dx}{6+4\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y=\frac{2}{x}$, $y=0$, $x=3$ и $y=x+1$;

б) $y=3x-x^2$ и $y=x^2-7x$;

в) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y=2^x$, $x=2$ и $y=\frac{1}{2}x+1$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int\limits_{3/2}^{2} \operatorname{arctg}(2x-3)dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^3 x dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+3)^2}dx$.

Вариант 15

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x^{\frac{9}{4}}-2x}{x^{\frac{1}{4}}}dx$	8	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$
2	$\int \frac{x^3-5x^6-3dx}{x^3}$	9	$\int \arccos 4x dx$
3	$\int 4^{2x+1}dx$	10	$\int \frac{x-2}{x^2-9x+20}dx$
4	$\int \frac{dx}{\cos^2(3x-2)}$	11	$\int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$
5	$\int \frac{dx}{8-x^2}$	12	$\int \cos 4x \cdot \cos 2x dx$
6	$\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx$	13	$\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$
7	$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-4}}$	14	$\int \frac{dx}{2+4\cos x+3\sin x}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = -4(x + 3)^3$, $y + x = 0$ и $y = 2x$;

б) $y = 4 - 2x$ и $y = x^2 - 10x + 16$;

в) $y = \operatorname{ctg} x - 1$, $y = 0$ и $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = \sqrt{3x}$, $y = 6 - x$ и $y = 0$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; б) $\displaystyle\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{ctg} 3x dx$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+2\right)^3}dx$.

Решение задач, аналогичных задачам контрольной работы 1

1. Вычислить интегралы:

1	$\int \frac{x^{\frac{5}{2}} - 2x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$	8	$\int \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 5} dx$
2	$\int \frac{(x+3)^3}{x} dx$	9	$\int (3 - x^2) \cos x dx$
3	$\int e^{\frac{x}{5}+1} dx$	10	$\int \frac{5 - x}{x^2 - 7x + 6} dx$
4	$\int \frac{dx}{\cos^2(2x-5)}$	11	$\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 (x-1)} dx$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$	12	$\int \cos^2 2x dx$
6	$\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$	13	$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
7	$\int \frac{x+1}{3 - \sqrt{x-2}} dx$	14	$\int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x + 1}$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:
   а) $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 0.5$ и $x = 2.5$;
   б) $y = x^2 - 5x + 6$ и $y = x - 2$;
   в) $y = \cos x - \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$.
3. Вычислить объем тела вращения, ограниченный данными линиями: $y = \sqrt[3]{x-1}$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2$.
4. Вычислить определенные интегралы:
   а) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 4} dx$;   б) $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$.

5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{0.5x+1}}dx.$

Решение.

1. 1) $\int \frac{x^{\frac{5}{2}}-2x}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int\left(x-2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^2}{2}-4\sqrt{x}+C.$

2) $\int \frac{(x+3)^3}{x}dx = \int \frac{(x^3+9x^2+27x+27)}{x}dx =$

$= \int\left(x^2+9x+27+\frac{27}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{9}{2}x^2+27x+27\ln|x|+C.$

3) $\int e^{\frac{x}{5}+1}dx = \begin{bmatrix} \frac{x}{5}+1=t \\ \frac{1}{5}dx=dt \\ dx=5dt \\ \end{bmatrix} = 5\int e^t dt = 5e^t + C = 5e^{\frac{x}{5}+1}+C.$

4) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-5)} = \begin{bmatrix} 2x-5=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} t + C =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x-5)+C.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}x=t \\ \sqrt{2}dx=dt \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-t^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$

6) $$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \begin{bmatrix} 2\ln x+3=t \\ \frac{2}{x}dx=dt \\ \frac{dx}{x}=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t^3dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C;$$

7) $$\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x-2}=t \\ x=t^2+2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = -2\int \frac{(t^2+3)tdt}{t-3}=$$

$$=-2\int\left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3}\right)dt=-2\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+12t+36\ln|t-3|\right)+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}-3(x-2)-24\sqrt{x-2}-72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right|+C.$$

8) $$\int \frac{x}{x^4-2x^2+5}dx = \begin{bmatrix} x^2=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-2t+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t^2-2t+1)+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1)^2+2^2}=\begin{bmatrix} t-1=z \\ dt=dz \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{2}+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{2}+C.$$

9) $$\int(3-x^2)\cos xdx=\int 3\cos xdx-\int x^2\cos xdx=$$

$$=3\sin x-\int x^2\cos xdx=\begin{bmatrix} u=x^2 & \Rightarrow & du=2xdx \\ dv=\cos xdx & \Rightarrow & v=\sin x \end{bmatrix}=$$

$$=3\sin x-x^2\sin x+2\int x\sin xdx=\begin{bmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\sin xdx & \Rightarrow & v=-\cos x \end{bmatrix}=$$

$$= 3\sin x - x^2 \sin x + 2\left(- x\cos x + \int \cos x dx\right) =$$

$$= 3\sin x - x^2 \sin x - 2x\cos x + 2\sin x + C.$$

10) $\int \frac{5-x}{x^2-7x+6}dx.$

Применим метод сравнения коэффициентов:

$$\frac{5-x}{x^2-7x+6} = \frac{5-x}{(x-1)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-6} =$$

$$= \frac{A(x-6)+B(x-1)}{(x-1)(x-6)} \Rightarrow A(x-6) + B(x-1) = 5 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(A+B)-(6A+B) = 5-x \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1, \\ 6A+B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{1}{5}; \end{cases}$$

$$\int \frac{5-x}{x^2-7x+6}dx = -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-6} =$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x-6| + C.$$

11) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx.$

Применим метод сравнения коэффициентов:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1) = x^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx - C = x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(A+B)+x(2A+C)+(A-B-C)=x^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\2A+C=0,\\A-B-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1-A,\\C=-2A,\\A-1+A+2A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\dfrac{1}{2},\\C=-1,\Rightarrow\\A=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

12) $$\int\cos^2 2xdx=\left[\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]=\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

13) $$\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\begin{bmatrix}\cos x=t\\ \sin x=\sqrt{1-t^2}\\ x=\arccos t\\ dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{bmatrix}=-\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\int(t^2-1)t^2dt=\int t^4dt-\int t^2dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

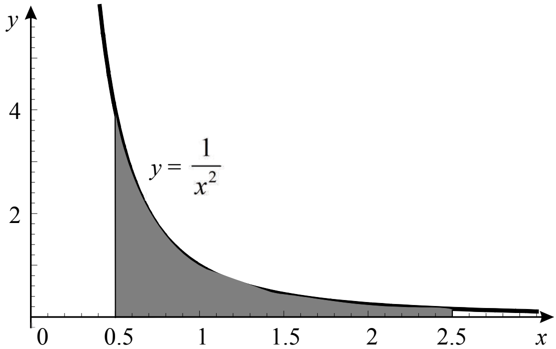
14) $$\int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}=$$

$$=\begin{bmatrix}t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\Rightarrow\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\Rightarrow\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\Rightarrow x=2\,\mathrm{arctg}\,t\end{bmatrix}=$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2 + 6t - 1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 + 2t - \frac{1}{3}} =$$

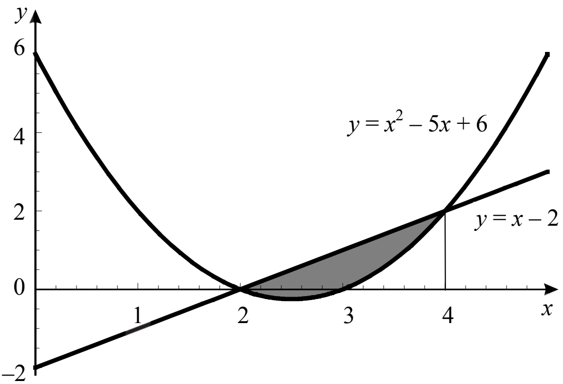
$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{3} + 2} \right| + C.$$

2. а) $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 0.5$ и $x = 2.5$;



$$S = \int_{0.5}^{2.5} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{0.5}^{2.5} = -\left(\frac{1}{2.5} - \frac{1}{0.5}\right) = -\left(\frac{2}{5} - 2\right) = 1\frac{3}{5};$$

б) $y = x^2 - 5x + 6$ и $y = x - 2$.



Найдем точки пересечения графиков функций, для этого приравняем левые и правые части функций:

$x^2 - 5x + 6 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4.$

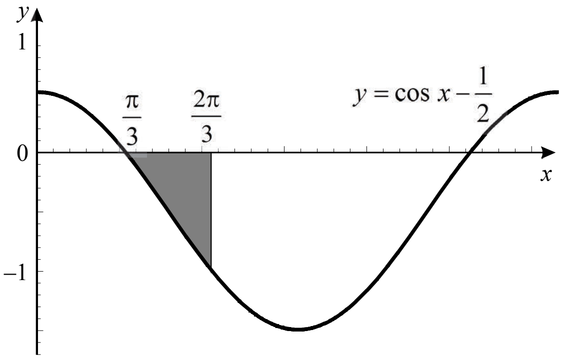
Теперь можно записать интеграл:

$$S = \int_2^4 \left((x-2) - (x^2 - 5x + 6)\right)dx = \int_2^4 \left(-x^2 + 6x - 8\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3\cdot 4^2 - 8\cdot 4\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2\right) = \frac{4}{3};$$

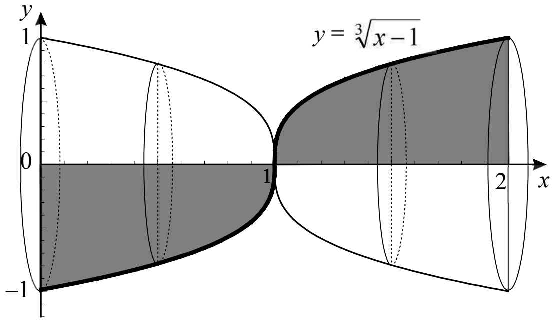
в) $y = \cos x - \dfrac{1}{2},\ y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{3}$ и $x = \dfrac{2\pi}{3}.$



$$S = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx = -\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

3. $y=\sqrt[3]{x-1},\ y=0, x=0$ и $x=2.$



$$V=2\pi\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2dx=2\pi\int_1^2(x-1)^{\frac{2}{3}}dx=2\pi\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_1^2=\frac{6\pi}{3}.$$

4. а) $$\int_1^2\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-4}=\left[\begin{array}{l} e^{2x}=t\\ 2e^{2x}dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2e^{2x}}\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4}\frac{dt}{t^2-2^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_{e^2}^{e^4}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{2+e^4}{2-e^4}\right|-\ln\left|\frac{2+e^2}{2-e^2}\right|\right);$$

б) $$\int_0^1 x\ln(x+1)dx=\left[\begin{array}{ll} u=\ln(x+1) & du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{x^2-1}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\int_0^1(x-1)\,dx+\ln(x+1)\Big|_0^1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^1+\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)=\frac{1}{4}.$$

5. а) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Решим сначала неопределенный интеграл данного вида:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix}1-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\dfrac{dt}{2}\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\sqrt{1-1^2}+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)=1;$$

б) $\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{0.5x+1}}dx.$

Решим сначала неопределенный интеграл данного вида:

$$\int\frac{1}{\sqrt[4]{0.5x+1}}dx=\int(0.5x+1)^{-\frac{1}{4}}dx=\begin{bmatrix}0.5x+1=t\\ \dfrac{1}{2}dx=dt\\ dx=2dt\end{bmatrix}=2\int t^{-\frac{1}{4}}dt=$$

$$=2\cdot\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}+C=\frac{8}{3}(0.5x+1)^{\frac{3}{4}}+C;$$

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{0.5x+1}}dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{a} \frac{1}{\sqrt[4]{0.5x+1}}dx = \lim_{a\to\infty}\frac{8}{3}(0.5x+1)^{\frac{3}{4}}\Big|_{-1}^{a} =$$

$= \frac{8}{3}\lim_{a\to\infty}\left((0.5a+1)^{\frac{3}{4}} - 0.5^{\frac{3}{4}}\right) = \infty$, таким образом, интеграл расходится.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Дифференциальные уравнения

Вариант 1

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $(1 + e^x)yy' = e^x$.

2) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

3) $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,(y/x) = x$.

4) $y' - 2y/(1 - x^2) = 1 + x$.

5) $xy' - x^2\cos x = y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' + 4y = 0$.

7) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

8) $y'' - y' = 9xe^x$.

9) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 2

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $xy' + y - y^2 = 0$.

2) $(x^2y + x^2)dx + (x^3 - 1)(y - 1)dy = 0$.

3) $y' = y/x + \sin\,(y/x)$.

4) $y'\cos x + y\sin x = 2x\cos^2 x$.

5) $xy' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' + 9y = 0$.

7) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

8) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 - 1)e^{3x}$.

9) $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 3

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'x^3 = 2y + 3$.

2) $(x + xy^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$.

3) $xy' - y = x\cos^2(y/x)$.

4) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

5) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 4y' = 0$.

7) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

8) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$.

9) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 4

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $x^2y^2y' = y$.

2) $xydx + (1 + x)dy = 0$.

3) $xy' = y(1 + \ln(y/x))$.

4) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$.

5) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

7) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

8) $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$.

9) $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 5

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y\ln y + xy' = 0$.

2) $(x - 2x^2)dy + (y - 2)dx = 0$.

3) $y'x\ln(y/x) = x + y\ln(y/x)$.

4) $xy' - y/(1 + x) = x$.

5) $y' = y/(3x - y^2)$, $y(0) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

7) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

8) $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x + x^2)e^{3x}$.

9) $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 6

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $xy'y(1 + x^2) = 1 + y^2$.

2) $\sin x dy = y \ln y dx$.

3) $(y'x - y) \sin (y/x) = x$.

4) $y' + 3y = e^{2x}$.

5) $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

8) $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$.

9) $y'' - y = 14e^{-x} - 16xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 7

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $(1 - x)^3 y' + (y - 1)^2 = 0$.

2) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$.

3) $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$.

4) $y' + y \cos x = 0{,}5 \sin 2x$.

5) $y' - x^2 y' + xy = 1$, $y(0) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

7) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

8) $3y'' - y' = 3 - 5x$.

9) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 8

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2.$

2) $xdy + (y - y^2)dx = 0.$

3) $y'x + 2\sqrt{xy} = y.$

4) $y' \sin x - y \cos x = 1.$

5) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 49y = 0.$

7) $y'' - 4y' + 5y = 0.$

8) $y'' - 2y' + y = 3\cos x + \sin x.$

9) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 9

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'\sqrt{9 + x^2} = y.$

2) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0.$

3) $y'x + x \operatorname{tg}(y/x) = y - x.$

4) $xy' + y(x+1) = 3x^2 e^{-x}.$

5) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' + 16y = 0.$

7) $y'' - 5y' + 4y = 0.$

8) $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x.$

9) $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 10

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $yy' = (1 - 2x)/y.$

2) $(1 + x^2)dy + \left(y\sqrt{1 + x^2} - xy\right)dx = 0.$

3) $y'x\cos(y/x) = y\cos(y/x) - x$.

4) $xy' - 2y = x + 1$.

5) $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

7) $y'' - 6y' + 8y = 0$.

8) $y'' + y = 3x^2 - x + 2$.

9) $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 11

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'x^2 = (y + 3)y\left(x + x^{1,5}\right)$.

2) $\sin^2 x dy = y \ln y dx$.

3) $y' = e^{y/x} + y/x$.

4) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

5) $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $36y'' + 12y' + y = 0$.

7) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

8) $y'' - 3y' + 2y = (3 - x)e^x$.

9) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 12

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' \cos^2 x = y/\ln y$.

2) $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$.

3) $y' = y^2/(x^2 + xy)$.

4) $xy' - 2y = 4x^3 \cos^2 x$.

5) $xy' + xy + y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 12y' + 36y = 0.$

7) $25y'' + y = 0.$

8) $y'' - 4y' + 3y = 12\sin x - 4\cos x.$

9) $y'' + y' - 12y = 16xe^{4x} + 22e^{4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 13

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' = 2 \cdot 5^{x-y}.$

2) $y^2 \ln x dx = (y-1)x dy.$

3) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}.$

4) $y' - \dfrac{3}{x} y = x^3 e^x.$

5) $xy' + y = \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $9y'' + 6y' + y = 0.$

7) $y'' - 2y' + 2y = 0.$

8) $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3).$

9) $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 14

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y - xy' = 1 - x^2 y'.$

2) $\left(1 + e^{3y}\right) x dx - e^{3y} dy = 0.$

3) $\left(y^2 - 3x^2\right) y' + 2xy = 0.$

4) $y - xy' - x^2 \cos x = 0.$

5) $\ln x (xy' - 1) = 2y, \quad y(e) = 0.$ Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 7y' - 8y = 0.$

7) $25y'' + 4y' + 13y = 0.$

8) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

9) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Вариант 15

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' + 2y - y^2 = 0$.

2) $\dfrac{e^{-x^2}\,dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0$.

3) $y - xy' = \dfrac{x}{\cos^2(y/x)}$.

4) $(1-x)y' - y = e^{4x}$.

5) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{2e}$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $4y'' + 4y' + y = 0$.

7) $y'' + 2y' = 0$.

8) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.

9) $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Решение задач, аналогичных задачам контрольной работы 2

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $(y+1)y' = y/\sqrt{1-x^2}$.

2) $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$.

3) $xy' = x + 2y$.

4) $y' - \dfrac{y}{2x+1} = e^{3x}\sqrt{2x+1}$.

5) $y' = -2y + 4x, \quad y(0) = 5$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

6) $y'' - 2y' - 15y = 0$.

7) $y'' + 36y = 0$.

8) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.

9) $y'' - 2y' + y = 2xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$. Указать также частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

Решение.

1) $$(y+1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y+1}{y}dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{y+1}{y}dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = \arcsin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \ln|y| = \arcsin x + C.$$

Проверим, является ли $y = 0$ решением исходного уравнения: $(0+1)0' = \dfrac{0}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 0 \equiv 0$, следовательно, $y = 0$ – решение и оно ни при каких C не входит в общее решение.

Ответ: $y + \ln|y| = \arcsin x + C, \ y = 0$.

2) $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x \sin y dx = -\operatorname{tg} y dy \overset{\sin y \neq 0}{\Rightarrow} e^x dx = -\frac{dy}{\cos y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int e^x dx = -\int \frac{dy}{\cos y} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\cos y} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{y}{2} = t \Rightarrow dy = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)dt}{(1+t^2)(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A+B+(B-A)t}{1-t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1-t^2} = \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int \left(\frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t} \right) dt = \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt = \ln|1+t| - \ln|t-1| =$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{t-1}\right| = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-1}\right|.$$

$$\Leftrightarrow e^x = -\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-1}\right| + C \Leftrightarrow x = \ln\left|\ln\left|C \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}+1}\right|\right|.$$

Проверим, является ли $\sin y = 0$ решением исходного уравнения: $e^x 0dx + 0dy = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$, следовательно, $\sin y = 0$ – решение, и оно ни при каких C не входит в общее решение.

Ответ: $x = \ln\left|\ln\left|C \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}+1}\right|\right|, \;\; y = \pi k, \;\; k \in \mathrm{Z}.$

3) $xy' = x + 2y \Leftrightarrow xy' - 2y = x \Leftrightarrow y' - \dfrac{2}{x}y = 1$ – линейное неоднородное уравнение. Решим сначала соответствующее однородное:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{x}y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C \Leftrightarrow \ln|y| = \ln(Cx^2) \Leftrightarrow y = Cx^2.$$

Теперь решим неоднородное уравнение, для этого $y = C(x)\,x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = C'(x)\,x^2 + 2xC(x)$, тогда $C'(x)x^2 + 2xC(x) - \dfrac{2}{x}C(x)x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C'(x)x^2 = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C(x) = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow C(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения запишется в виде $y = \left(C - \dfrac{1}{x}\right)x^2 = Cx^2 - x.$

Ответ: $y = Cx^2 - x.$

4) $y' - \dfrac{y}{2x+1} = e^{3x}\sqrt{2x+1}$ – линейное неоднородное уравнение. Решим сначала соответствующее однородное:

$$y' - \frac{y}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x+1} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C \Leftrightarrow y = C\sqrt{2x+1}.$$

Решим теперь неоднородное уравнение, для этого $y = C(x)\sqrt{2x+1} \Rightarrow y' = C'(x)\sqrt{2x+1} + \dfrac{C(x)}{\sqrt{2x+1}}$, тогда $C'(x)\sqrt{2x+1} +$

$$+\frac{C(x)}{\sqrt{2x+1}} - \frac{C(x)\sqrt{2x+1}}{2x+1} = e^{x}\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x)\sqrt{2x+1} = e^{3x}\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow C'(x) = e^{3x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения запишется в виде $y = \left(\dfrac{1}{3}e^{x} + C\right)\sqrt{2x+1}.$

Ответ: $y = \left(\dfrac{1}{3}e^{x} + C\right)\sqrt{2x+1}.$

5) $y' = -2y + 4x,\ y(0) = 5.$

Сначала решим дифференциальное уравнение: $y' = -2y + 4x$ – линейное неоднородное уравнение. Решим сначала соответствующее однородное: $y' = -2y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -2dx \Leftrightarrow \ln|y| = -2x + C \Leftrightarrow y = Ce^{-2x}$.

Решим теперь неоднородное уравнение, для этого $y = C(x)e^{-2x} \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$, тогда $C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ C'(x)e^{-2x} = 4x \Leftrightarrow C'(x) = 4xe^{2x} \Rightarrow C(x) = 4\int xe^{2x}dx =$ $= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \dfrac{4}{2}xe^{2x} - \dfrac{4}{2}\int e^{2x}dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C.$ Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения запишется в виде $y = (2xe^{2x} - e^{2x} + C)e^{-2x} = Ce^{-2x} + 2x - 1$.

Найдем частное решение:

$y(0) = Ce^{0} + 2 \cdot 0 - 1 = C - 1 = 5 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow y = 6e^{-2x} + 2x - 1.$

Ответ: $y = Ce^{-2x} + 2x - 1,\ y = 6e^{-2x} + 2x - 1.$

6) $y'' - 2y' - 15y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -3 \Rightarrow y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x}$.

Ответ: $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x}$.

7) $y'' + 36y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 6i \Rightarrow y = C_1e^{0x}\cos 6x + C_2e^{0x}\sin 6x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$.

Ответ: $y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$.

8) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. Решим сначала соответствующее однородное уравнение $y'' - 12y' + 36y = 0$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^{6x}$.

Для нахождения решения неоднородной задачи представим произвольные постоянные в виде функций и решим систему уравнении для их нахождения, где $y_1 = e^{6x}$, $y_2 = xe^{6x} \Rightarrow y'_1 = 6e^{6x}$, $y'_2 = e^{6x} + 6xe^{6x}$.

$$\begin{cases} C'_1(x)e^{6x} + C'_2(x)xe^{6x} = 0, \\ 6C'_1(x)e^{6x} + C'_2(x)e^{6x}(1 + 6x) = 14e^{6x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) + C'_2(x)x = 0, \\ 6C'_1(x) + C'_2(x)(1+6x) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -xC'_2(x), \\ -6xC'_2(x) + C'_2(x) + 6xC'_2(x) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -xC'_2(x), \\ C'_2(x) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -14x, \\ C'_2(x) = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -7x^2 + C_3, \\ C_2(x) = 14x + C_4. \end{cases}$$

Тогда, решение запишется в виде

$$y = (-7x^2 + C_3 + 14x^2 + C_4x)e^{6x} \Rightarrow y = (C_3 + C_4x)e^{6x} + 7x^2e^{6x}.$$

9) $y'' - 2y' + y = 2xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Сначала решим дифференциальное уравнение: $y'' - 2y' + y = 2xe^x$ – линейное неоднородное уравнение. Решим соответствующее однородное $y'' - 2y' + y$. Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,\,2} = 1 \Rightarrow y = (C_1 + C_2x)e^x$. Для нахождения решения неоднородной задачи представим произвольные постоянные в виде функций и решим систему уравнении для их нахождения, где $y_1 = e_x$, $y_2 = xe_x \Rightarrow y'_1 = e^x$, $y'_2 = e^x + xe^x$.

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^x(1+x) = 2xe^x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) + C'_2(x)x = 0, \\ C'_1(x) + C'_2(x) + xC'_2(x) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -C'_2(x)x, \\ -xC'_2(x) + C'_2(x) + xC'_2(x) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -2x^2, \\ C'_2(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \mathrm{C}_3, \\ C_2(x) = x^2 + \mathrm{C}_4. \end{cases}$$ Тогда, решение запишется в виде

$$y = \left(-\frac{2}{3}x^3 + C_3 + x^3 + C_4x\right)e^x \Rightarrow y = (C_3 + C_4x)e^x + \frac{1}{3}x^3e^x.$$

Найдем частное решение:

$$y(0) = (C_3 + C_4 \cdot 0)e^0 + \frac{1}{3} \cdot 0e^0 = C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1,$$

$$y' = C_3 e^x + C_4 e^x + C_4 x e^x + x^2 e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x \Rightarrow y'(0) =$$

$$= C_3 e^0 + C_4 e^0 + C_4 0 e^0 + 0^2 e^0 + \frac{1}{3} 0^3 e^0 = C_3 + C_4 = 1 \Rightarrow C_4 = 0.$$

Таким образом, частное решение имеет вид $y = e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x$.

Ответ: $y = (C_3 + C_4 x)e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x$, $y = e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x$.

Список рекомендуемой литературы

Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2004.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. ; СПб. : Профессия, 2001.

Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : [б. и.], 2007.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997.

Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре и математическому анализу. – Вып. 1 : Интеграл и площадь / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, А. М. Поташник. – М. : Новая школа, 1996.

Карасев А. И. Курс высшей математики для экономических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютин, Т. И. Савельева. – М. : Высш. шк., 1982. – Ч. 1, 2.

Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1994.

Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – М. : Астрель, 2001.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Физматлит, 2006.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2009.

Рябушко А. П. Индивидуальные занятия по высшей математике / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Вышэйш. шк., 2009.

Шабунин М. И. Математика : Алгебра. Начала математического анализа : задачник / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев, Т. А. Олейник, Т. В. Соколова. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

Щипачев В. С. Высшая математика / В. С. Щипачев. – М. : Высш. шк., 2005.

Оглавление

Учебное издание

Новак Екатерина Владимировна
Рязанова Татьяна Владимировна
Новак Ирина Владимировна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Завредакцией М. А. Овечкина
Редактор Т. А. Федорова
Корректор Т. А. Федорова
Компьютерная верстка Н. П. Сорокиной

План выпуска 2015 г. Подписано в печать 17.11.2015.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 5,5. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 70 экз. Заказ 348.
Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок